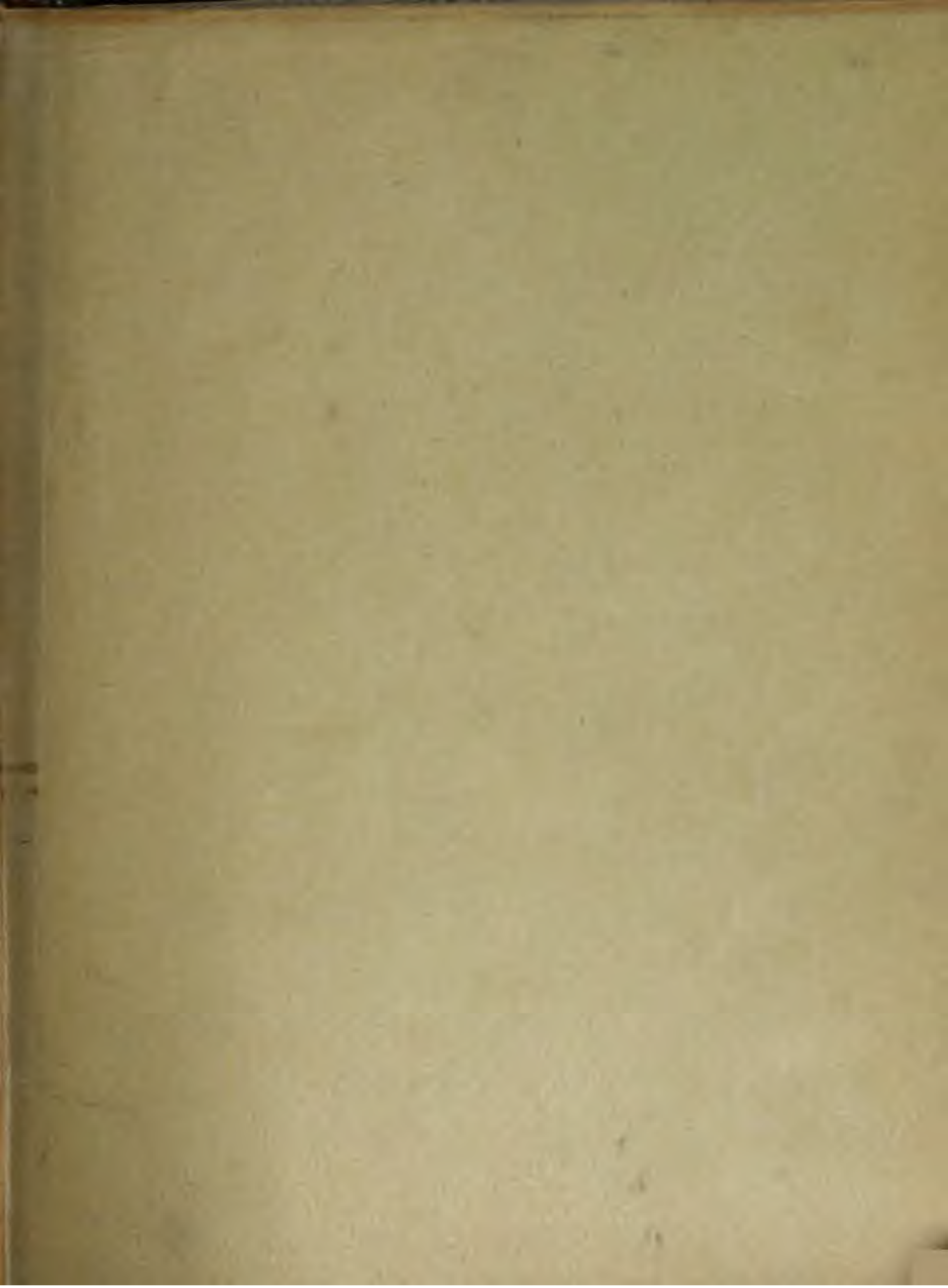
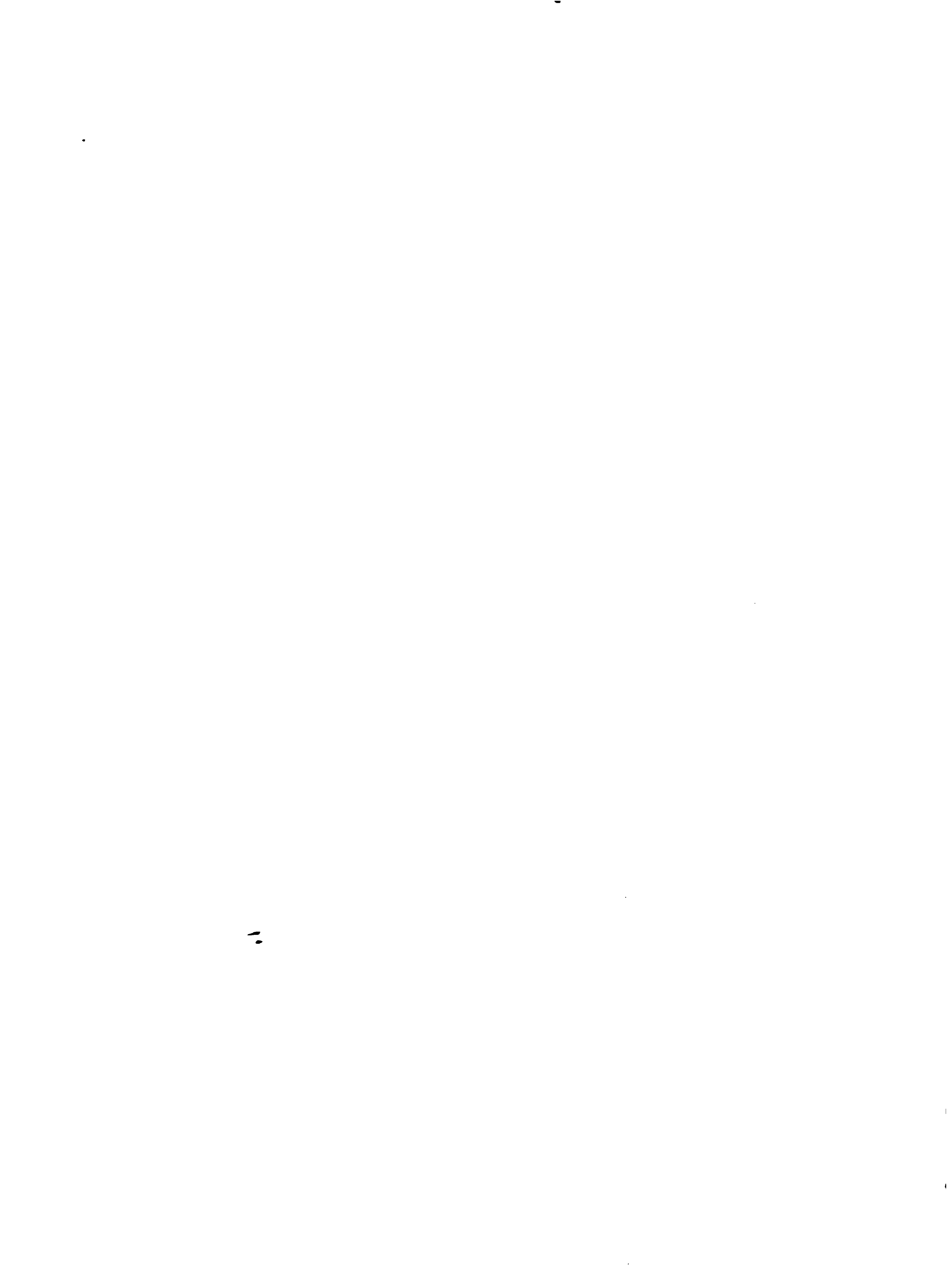



HARVARDIANAE
ACADEMIAE
ET
VE
RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE
IN NOV ANG
SIGILLUM







Grundbegriffe der Mengenlehre.

Von

Gerhard Hessenberg.

Sonderdruck aus den „Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft.

Mit 6 Figuren im Text.



Göttingen
Vandenhoeck & Ruprecht
1906.

Berichtigungen:

Seite 526, Zeile 15 v. o. statt z_1, z_2, z_3 lies z_1, z_2, z_3.
Seite 561, letzte Zeile: statt Wohlordnung lies Ordnung.
Seite 562, Zeile 9 v. u. statt Element N lies Element α.
Seite 599, Zeile 6 v. o. statt lim $(\mu\lambda)$ lies lim $(\alpha\lambda)$.
Seite 626, Zeile 10 v. o. statt darstellbar lies endlich darstellbar.
Seite 646, Zeile 14 v. u. statt Zahlprozeß lies Zählprozeß.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit erscheint gleichzeitig im vierten Hefte der „Abhandlungen der Fries'schen Schule“ und war ursprünglich als Fortsetzung eines unter dem Titel „Das Unendliche in der Mathematik“ im ersten Heft dieser Zeitschrift erschienenen Berichtes gedacht, der sich mit der Ausschaltung der aktual unendlichen Größen aus den Grenzmethoden, insbesondere aus der Infinitesimalrechnung, beschäftigt. Die Fortsetzung sollte zeigen, daß mit dieser Ausschaltung die Mathematik keineswegs auf die Betrachtung des aktual Unendlichen überhaupt verzichtet. Vielmehr sollte das Beispiel der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums die *Möglichkeit* der Unterscheidung verschiedener unendlicher Mächtigkeiten, und der daraus folgende Cantorsche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen die *praktische Bedeutung* dieser Unterscheidung dartun.

Das Referat wuchs aber während der Ausarbeitung dauernd; das augenblicklich stark zunehmende Interesse an mengentheoretischen Untersuchungen veranlaßte mich schließlich, den Bericht geradezu zu einer Einleitung in die Grundbegriffe des betrachteten Gebietes auszugestalten. Darüber hinauszugehen und etwa noch die mathematischen Anwendungen in größerem Umfange darzustellen verbot aber die Rücksicht auf den nicht ausschließlich mathematischen Leserkreis dieser Zeitschrift. Andererseits liegt hierüber der ausführliche Schoenfließsche Bericht in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung vor, und endlich hätte der unvermeidliche Literaturnachweis die Fertigstellung der Arbeit ins ungemessene verzögert.

Den mengentheoretischen Kalkul wollte ich ursprünglich nicht in den Umfang des Berichtes einbeziehen. Es zwangen mich aber

zwei Gründe dazu: Einmal die Paradoxie der Menge aller Ordnungszahlen, die mir die klarste und schärfste Fassung des ultrafiniten Paradoxons zu sein scheint, das unter anderen von Russell in so zahlreiche Formen gebracht worden ist. Zu ihrer Darstellung bedarf man immerhin des Begriffs der Ordnungszahl; und damit der Widerspruch nicht in diesem Begriff selbst gesucht werde, mußte gezeigt werden, welch umfangreiches Gebiet des widerspruchsfreien Kalkuls durch ihn eröffnet wird.

Der zweite Grund, der mich zur Darstellung des Kalkuls veranlaßte, war die Frage der Erzeugungsprinzipien. Bei diesen ist der Satz von Bedeutung, daß jede Mächtigkeit, die eine unmittelbar vorangehende besitzt, ein neues Prinzip verlangt; und hierfür muß man zeigen können, daß das Quadrat jeder Mächtigkeit ihr selbst gleich ist. Ausgesprochen ist dieser Satz nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein zuerst von Herrn Georg Cantor. Ob der in dieser Mitteilung flüchtig skizzierte Beweis derselbe ist, den ich hier darstelle, vermag ich nicht zu beurteilen. Da ferner die Sätze über den Kalkul mit transfiniten Ordnungszahlen von Herrn Cantor nur für die zweite Zahlklasse ausgesprochen sind[1] und auch Herr Schoenfließ in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“[2] sich ausschließlich mit dieser beschäftigt, hielt ich es für angebracht, die Gültigkeit des ganzen Kalkuls für jede Zahlklasse zum Ausdruck zu bringen[3]. Ich verhehlte mir nicht, daß dieser Teil über den transfiniten Kalkul in erster Linie nur für Mathematiker Interesse haben kann, und habe mich daher bemüht, die späteren Kapitel nach Möglichkeit unabhängig von ihm zu gestalten, so daß der mathematisch ungeschulte Leser ihn überschlagen kann.

Wer auf Konsequenz und Geschlossenheit der Darstellung Wert legt, wird nicht damit einverstanden sein, daß die endlichen

---

[1] Math. Annalen, Bd. 21 und 49.

[2] Band I, 1, pag. 193, § 9.

[3] Herr Schoenfließ sagt l. c. § 8, S. 193: Der hieran anschließende Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge von Zahlklassen ... entbehrt noch der Ausführung.

Zahlen zunächst als etwas Bekanntes angenommen werden und die Theorie der unendlichen Mengen vielfach auf sie gestützt wird. Wäre dieser Bericht blos für Mathematiker bestimmt, so hätte ich, wenn ich ihn dann überhaupt zu schreiben für nötig gehalten hätte, vielleicht anders angeordnet und die im letzten Teil gegebenen Theorieen der endlichen Zahlen vorangestellt. Ich hätte auf diesem Wege auch nicht die schönen Dedekindschen Betrachtungen in verschiedene Kapitel zu zerstreuen brauchen. Daß ich eine andere Anordnung zu Grunde gelegt habe, geschah aus der festen Überzeugung heraus, daß dadurch das Verständnis des schwierigen Gegenstandes wesentlich erleichtert wird.

Zu besonderem Danke bin ich Herrn Zermelo verpflichtet für die Durchsicht der Korrekturbogen, vor allem aber für die Mitteilung eigener, noch unveröffentlichter Untersuchungen und die Erlaubnis, von ihnen Gebrauch zu machen. Zu diesen gehört auch der schöne Satz XX, Seite 539, bei dem im Text versehentlich der Hinweis auf den Urheber unterblieben ist. Ferner machte mich Herr Zermelo darauf aufmerksam, daß der Beweis des § 119 (ebenso wie der entsprechende bei Dedekind, „Was sind und was sollen die Zahlen?") in versteckter Weise von dem in § 102 und § 137 besprochenen Auswahlpostulat Gebrauch macht; es war leider nicht mehr möglich, dies im Text hervorzuheben.

Inhalt.

Erster Teil.

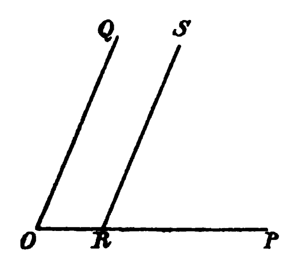
Die Grundbegriffe der Teilung, Vergleichung und Ordnung.

I.

Das Paradoxon der Winkelvergleichung.

§ 1. Im ersten Hefte dieser Zeitschrift ist in einem Referat über „das Unendliche in der Mathematik" dargetan worden, daß weder in den elementaren noch in den als „Infinitesimalrechnung" bezeichneten Kapiteln der Mathematik eine wirklich unendliche „Größe" auftritt; daß vielmehr das Wort „unendlich" lediglich zur abkürzenden Beschreibung wichtiger Tatsachen des endlichen benutzt wird.

Dort bot sich im zweiten Kapitel bei Gelegenheit der Winkelmessung ein Beispiel einer Paradoxie des Unendlichen, die dadurch ausgeschaltet wurde, daß Winkel lediglich durch Scheitelstrahlenzerlegung verglichen werden durften. Dieses Paradoxon der Winkelflächen ist sehr lehrreich und soll daher im folgenden als Ausgangspunkt unserer Betrachtung dienen.



Es sei POQ ein beliebiger, spitzer oder stumpfer Winkel, R ein Punkt des Schenkels OP. Wir ziehen durch R in das innere des Winkels eine Paralelle RS zu OQ. Sie zerlegt die Fläche des Winkels in zwei Teile, in den Streifen $QORS$ und in den Winkel

PRS, der dem Winkel *POQ* gleich ist und durch Verschiebung mit ihm zur Deckung gebracht werden kann.

Nach dem Grundsatz: „Der Teil ist kleiner als das Ganze“ ist andererseits der Winkel *PRS* kleiner als der Winkel *POQ*. Da die Begriffe „kleiner“ und „gleich“ sich ausschliessen, entsteht ein Widerspruch.

§ 2. Es wird vielfach versucht, den Widerspruch durch folgende Argumentation zu beseitigen: Das Ebenenstück *POQ* ist unendlich, also kein Ganzes. Demnach kann der Grundsatz vom Teil und Ganzen nicht angewandt werden.

Diese Argumentation hat den Fehler, daß sie zuviel beweist. Da sie nämlich in keiner Weise davon Gebrauch macht, daß der zerlegende Halbstrahl *RS* am Punkte *O* vorbeigeht, würde sie auch den Fall der Zerlegung durch Scheitelstrahlen treffen, und es wäre damit nachgewiesen, daß Winkel überhaupt nicht verglichen werden können. Außerdem kollidiert dieser Gebrauch der Begriffe Teil und Ganzes mit dem vulgären Sprachgebrauch; Teil und Ganzes sind korrelative Begriffe, und da das Ebenenstück *POQ* offenbar Teile besitzt, ist es selbst das Ganze, von dem diese Teile genommen werden.

Der Mathematiker im besonderen hat eine tiefe Abneigung gegen solche Argumentation mit Allgemeinbegriffen. Wenn für ihn irgend ein Gegenstand „ganz“ ist, so genügt es dafür, daß genau feststeht, was zu ihm gehört, und was nicht. Das Zugehören selbst ist aber wieder ein Allgemeinbegriff, und es sei daher am speziellen Beispiel ausdrücklich festgestellt, daß von jedem Punkt der Ebene feststeht, ob er im innern, im äussern oder auf der Grenze von *POQ* liegt. Darum gilt *POQ* mathematisch als Ganzes. Da weiterhin jeder Punkt *PRS* ein Punkt von *POQ*, aber nicht

jeder Punkt von *POQ* einer von *PRS* ist, gilt *PRS* als Teil von *POQ*.

§ 3. Wollen wir also den falschen Schluss, der unseren Widerspruch verursacht, wirklich scharf „herauspräparieren“, so müssen wir die allgemeinen Begriffe, mit denen wir operierten, näher untersuchen. Wir finden drei Grundbeziehungen: die Vergleichung, der das Wort „gleich“ entspricht, die Ordnung, der das Wort „kleiner“ entspricht, und endlich die Beziehung des Teils zum Ganzen. Die Bedeutung dieser drei Beziehungen und ihre Verknüpfung untereinander reicht natürlich weit über das Paradoxon der Winkelvergleichung hinaus; die Ausführlichkeit der folgenden Betrachtungen ist nicht durch das einzelne Beispiel geboten.

Wir werden bei der Untersuchung unserer drei Grundbeziehungen auf eine Definition derselben zunächst verzichten, da eine solche, falls sie überhaupt möglich ist, an Stelle der zu prüfenden lediglich neue Allgemeinbegriffe von gleicher oder größerer Verschwommenheit zum Ausgangspunkt stempeln würde. Dagegen fragen wir, der kritisch-mathematischen Methode folgend, bei jedem unserer Begriffe nach den Grundsätzen, in denen er auftritt, d. h. nach denjenigen Eigenschaften, die eine Beziehung besitzen muß, damit ihr der Name einer Vergleichung, Ordnung oder Teilung zukommen kann.

II.

Die Teilung und die Vergleichung.

§ 4. Welcher Art die Beziehung auch sei, die wir mit dem Wort „*A* ist ein Teil von *B*“ bezeichnen, sie wird folgendem Grundsatz gehorchen müssen:

Ia. Ist A ein Teil von B, B ein Teil von C, so ist A ein Teil von C.

Da man zuweilen ein Ding A mit zu seinen eigenen Teilen als „uneigentlichen“ oder „unechten“ Teil hinzurechnet, wollen wir jeden mit A nicht identischen Teil von A einen „eigentlichen“ oder „echten“ Teil nennen. Diese Trennung ist für Satz Ia nicht erforderlich, wohl aber für folgende zwei Sätze:

IIa. Ist A ein eigentlicher Teil von B, so ist B kein Teil von A.

IIIa. Ist A mit B identisch, so ist B kein eigentlicher Teil von A.

Satz IIa handelt von der Umkehrung, Satz IIIa von dem Verhältnis zur Identität.

Drei analoge Sätze gelten von der Vergleichung. Da aber keineswegs alle Vergleichungen durch das Zeichen $=$ und das Wort „gleich“ ausgedrückt werden, wollen wir hierfür das mengentheoretische Zeichen $\sim$ und den allgemeinen Terminus „aequivalent“ oder „gleichwertig“ gebrauchen.

Wir haben alsdann folgende Grundsätze:

Ib. Ist $A \sim B$, $B \sim C$, so ist $A \sim C$.

IIb. Ist $A \sim B$, so ist $B \sim A$.

IIIb. Ist A mit B identisch, so ist $A \sim B$.

Diesen Bedingungen einer Vergleichung genügen in der Geometrie unter anderem die Kongruenz und die Ähnlichkeit von Figuren, die Parallelität von Geraden u. a. m. Da wir allgemein bestrebt sind, jede Vergleichung als Identität gewisser Eigenschaften darzustellen, konstruieren wir vielfach solche Eigenschaften eigens zu diesem Zwecke. So spricht man bei parallelen Geraden von „gleichen Richtungen“, bei ähnlichen Figuren von „gleicher Form“.

§ 5. Die Beziehungen der Teilung und der Vergleichung können an der gleichen Gruppe von Dingen auftreten. Von einer Verknüpfung der beiden Beziehungen kann aber nur dann die Rede sein, wenn die Teile der verglichenen Gegenstände auch der Vergleichung unterworfen sind. Sind z. B. die Gegenstände ebene Polygone, die hinsichtlich ihres Flächeninhaltes verglichen werden, ihre Teile aber die Punkte des Innern, so findet die Vergleichung auf diese Teile keine Anwendung. Ebenso liegt der Fall beim Winkelmessen. Die Vergleichung besteht im aufeinanderlegen der Schenkel. Bei jeder Zerlegung nun, die nicht durch Scheitelstrahlen erzeugt wird, ist mindestens ein Teil unvergleichbar mit dem Ganzen.

Definieren wir dagegen die Teilung der Polygone durch geradlinige Zerschneidung, so sind die Teile wieder Polygone, also wieder vergleichbar. Definieren wir ebenso die Vergleichung der Winkel durch Zerschneiden in kongruente Teile ohne die Beschränkung auf Scheitelstrahlen, so sind alle Teile, die durch geradliniges Zerschneiden entstehen, demselben Vergleichungsprinzip zugänglich.

Wir betrachten nun lediglich diesen Fall, daß die Teile dem Vergleichungsprinzip zugänglich sind und stellen dazu folgendes Postulat, dessen Gültigkeit im speziellen Fall erst nachzuweisen ist:

IV. (Postulat der äquivalenten Teile.) Ist A zu B äquivalent, und enthält es einen Teil A_1, so enthält B einen zu A_1 äquivalenten Teil B_1.

Für die weiteren Ausführungen werden wir lediglich die Sätze I—III, a und b und IV verwenden. Die eingestreuten Beispiele sollen nur zur Erläuterung und zum Nachweis dessen dienen, daß dem logischen Formalismus der Sätze wirkliche Beziehungen entsprechen. In jedem einzelnen Anwendungsfalle wird man sich

selbstverständlich immer erst zu überzeugen haben, daß die vorhandenen Beziehungen wirklich umgekehrt dem Formalismus I—IV genügen.

Da es von Wert ist, daß tatsächlich nur die Sätze I—IV zur Verwendung gelangen, werde ich die nächstfolgenden Beweise zum größeren Teil in ihre Syllogismen zerlegen.

III.

Die Ordnung.

§ 6. Als „Ordnung" werden alle diejenigen Beziehungen bezeichnet, die wir mit den Zeichen $>$, $<$ und mit Worten wie „größer, kleiner", „früher, später", „vor, nach", „über, unter", „rechts, links", aussprechen.

Eine Ordnung muß folgenden Grundsätzen genügen:

Ic. Ist $A < B$, $B < C$, so ist $A < C$.

IIc. Ist $A < B$, so ist sicher nicht $B < A$.

IIIc. Ist A mit B identisch, so ist sicher nicht $A < B$.

Diese Bedingungen unterscheiden sich zunächst nur durch die Bezeichnung von den drei ersten der Teilung, Ia bis IIIa. Der Unterschied zwischen Ordnung und Teilung tritt erst zu Tage, wenn wir die charakteristischen Sätze aufstellen, die die Ordnung mit der Vergleichung verknüpfen. Der erste von ihnen schließt wegen IIIb den Satz IIIc ein und lautet:

V. Ist $A \sim B$, so ist sicher nicht $A < B$.

Satz V und IIc behaupten zusammen die Ausschließung der Begriffe kleiner, größer [1]) und gleich. Diese Ausschließung ist

[1] Es ist hier stillschweigend angenommen, daß $A < B$ und $B > A$ verschiedene Ausdrucksweisen für die gleiche Beziehung sind.

eine Konzession an den Sprachgebrauch: Wir wollen die Worte „größer“ „kleiner“ nur für Begriffe gebrauchen, die die Gleichheit ausschließen.

Der nächste Satz kann als Satz der äquivalenten Ordnung bezeichnet werden und lautet:

VI. Ist $A \sim A'$, $B \sim B'$ und $A < B$, so ist auch $A' < B'$.

Man kann ihn in zwei Sätze zerlegen, deren jeder aus VI folgt und die zusammen wieder VI ergeben:

VI_1. Ist $A \sim B$, $B < C$, so ist $A < C$.

VI_2. Ist $A < B$, $B \sim C$, so ist $A < C$.

Gelten VI_1 und VI_2, so folgt aus den Voraussetzungen $A \sim A'$, $A < B$ in VI zunächst $A' < B$ nach VI_1, hieraus und aus $B \sim B'$ nach VI_2 die Behauptung von VI. Nimmt man umgekehrt A mit A' als identisch an, so geht Satz VI in VI_2 über; VI_1 ist der Spezialfall von VI, der aus der Identität von B mit B' entsteht.

Zu diesen Sätzen kommt als letzter ein Satz von prinzipieller Bedeutung:

VII. (Satz der Trichotomie). Entweder ist $A < B$, oder $B < A$, oder $A \sim B$.

§ 7. Sätze, die die Ordnung mit der Teilung in Beziehung setzen, sind zunächst nicht aufgestellt; denn gerade diese Sätze, wie z. B. der Grundsatz, der Teil sei kleiner als das Ganze, sollen Gegenstand der weiteren Untersuchung sein.

Ehe wir zu diesen übergehen, beweisen wir an einem einfachen Beispiel, daß der Satz von der Trichotomie unabhängig ist von allen vorangehenden Sätzen der Vergleichung und Ordnung.

Zu diesem Nachweis wählen wir als Gegenstände der Vergleichung die Punkte des Raumes und als Vergleichung die Iden-

tität. $A = B$ heißt also, daß A und B denselben Punkt bezeichnen.

Um die Punkte zu ordnen, greifen wir zunächst einen beliebigen Punkt O heraus und setzen fest, daß $O < A$ für jeden von O verschiedenen Punkt A sein soll. Sind nun A und B zwei von einander und von O verschiedene Punkte, so schreiben wir $A < B$, wenn die Strecke OA kürzer als OB ist. Wir überzeugen uns sofort von der Gültigkeit der Sätze Ic bis IIIc. Um weiter V und VI zu beweisen, beachten wir, daß aus $A = B$ die Gleichheit der Strecken OA und OB folgt. Daß VII aber nicht gilt, erkennt man sofort daran, daß aus der gleichen Länge der Strecken OA und OB keineswegs die Identität der Punkte A, B folgt.

Die Unabhängigkeit des Satzes VII läßt sich nicht umkehren, vielmehr ist VI eine Folge von VII. Betrachten wir, um dies einzusehen, zunächst VI_1, d. h. die beiden Voraussetzungen:

$$(1)\ A \sim B \qquad (2)\ B < C.$$

Die Annahme $C < A$ würde mit (2) nach Ic zu $B < A$ führen, was (1) widerspricht. Die Annahme $C \sim A$ ergäbe mit (1) nach Ib $C \sim B$. was (2) widerspricht. Der Widerspruch entspringt in beiden Fällen aus V. Da weder $C < A$ noch $C \sim A$ sein kann, folgt aus VII, daß $A < C$ sein muss. Ebenso beweist man VI_2.

IV.

Das Problem der Trichotomie.

§ 8. Wenn wir zu dem System der bisherigen Sätze noch den Grundsatz hinzunehmen, daß der Teil[1] kleiner als das Ganze sei, so folgt mit Satz VI_1 sofort, daß $A < B$ auch dann statthat, wenn A zwar nicht selbst ein Teil von B, wohl aber einem Teil von B

[1] Es kann sich hier und im folgenden natürlich nur um eigentliche Teile handeln.

äquivalent ist. Bei den üblichen Vergleichungsmethoden teilbarer Größen gilt aber auch die Umkehrung: Wenn $A < B$ ist, so gibt es in B einen zu A äquivalenten Teil. Danach liegt es nahe, den Begriff des kleiner überhaupt so zu definieren: A heißt kleiner wie B, wenn es einem Teile von B äquivalent ist.

Trotzdem nun unsere bisherigen Entwicklungen noch lange nicht alle für die Messung endlicher Größen charakteristischen Tatsachen enthalten, sind wir bereits in der Lage, die Unzulässigkeit einer solchen Definition zu erkennen. Sie führt nämlich nicht zu einer dreifachen, sondern zu einer vierfachen Disjunktion.

Benutzen wir lediglich das Kriterium, ob A einem Teile von B äquivalent ist, (ohne es mit dem Zeichen $A < B$ auszudrücken,) so erhalten wir eine Dichotomie: Entweder gibt es einen Teil B_1 von B, so daß $A \sim B_1$, oder es gibt keinen solchen Teil.

Vertauschen wir die Rollen von A und B, so entsteht eine zweite Dichotomie. Beide Dichotomieen vereinigen sich nach dem bekannten logischen Schema zu folgender vierfachen Disjunktion:

VIII. Einer der folgenden vier Fälle muß stets zutreffen, und jeder schließt die drei anderen aus:

(A) A ist einem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent.
(B) A ist einem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent.
(Γ) A ist keinem Teil von B, B einem Teil von A äquivalent.
(Δ) A ist keinem Teil von B, B keinem Teil von A äquivalent.

Es sind hierbei stets eigentliche Teile gemeint.

§ 9. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

Wird das Eintreten des Falles (B) mit $A < B$ oder $B > A$ bezeichnet, so erfüllt diese, so definierte Beziehung alle Anforderungen der Ordnung mit Ausnahme des Satzes VII von der Trichotomie.

Zunächst weisen wir die Gültigkeit des Postulates V nach: Ist $A \sim B$, so ist gewiß nicht $A < B$. Wäre nämlich $A < B$, so hieße das nach VIII (B):

(1) B besitzt einen Teil B_1, (2) $B_1 \sim A$. Im Verein mit $A \sim B$ folgt hieraus nach IV:

(3) A besitzt einen Teil A_1, (4) $A_1 \sim B_1$.

Aus den Aequivalenzen

$$A_1 \sim B_1, \quad B_1 \sim A, \quad A \sim B$$

folgt nun nach Ib, daß A_1 zu B äquivalent ist, im Widerspruch mit der zweiten Aussage von (B).

Das Postulat IIIc ist ein spezieller Fall von V, da die Identität nach IIIb ein spezieller Fall der Äquivalenz ist.

Die Aussagen des Falles (Γ) gehen aus (B) durch Vertauschung von A mit B hervor. Das Eintreten dieses Falles ist also durch $A > B$ oder $B < A$ zu bezeichnen. Da (B) und (Γ) sich logisch ausschließen, ist hiermit das Postulat IIc als erfüllt nachgewiesen.

Das Postulat Ic beweisen wir in zwei Schritten. Wir entnehmen zunächst aus $A < B$ die Voraussetzungen:

(1) B enthält einen Teil B_1, (2) $B_1 \sim A$,

und ebenso aus $B < C$:

(3) C enthält einen Teil C_1, (4) $C_1 \sim B$.

Aus (1) und (4) folgt nach IV:

(5) C_1 enthält einen Teil C_2, (6) $C_2 \sim B_1$.

Aus (3) und (5) nach Ia:

(7) C enthält einen Teil C_2.

Endlich aus (2) und (6) nach Ib:

(8) $C_2 \sim A$.

Damit ist der erste Teil der Behauptung $A < C$ erwiesen. Noch

einfacher ist sein Beweis unter den Voraussetzungen der Sätze VI_1 oder VI_2. Im ersten Falle hat man:

$$(9)\ A \sim B, \quad (10)\ C \text{ enthält einen Teil } C_1, \quad (11)\ C_1 \sim B.$$

Aus (9) und (11) folgt nach Ib:

$$(12)\ C_1 \sim A.$$

Bei Satz VI_2 ist vorausgesetzt:

$$(13)\ B \text{ enthält einen Teil } B_1, \quad (14)\ B_1 \sim A, \quad (15)\ C \sim B.$$

Aus (15) und (13) folgt nach (IV):

$$(16)\ C \text{ enthält einen Teil } C_1, \quad (17)\ C_1 \sim B_1,$$

und aus (17) und (14) nach Ib

$$(18)\ C_1 \sim A.$$

Sicher enthält also C einen zu A äquivalenten Teil, und es bleibt zu zeigen, daß das Umgekehrte nicht statthat. Wir nehmen das Gegenteil an:

$$(19)\ A \text{ enthält einen Teil } A_1, \quad (20)\ A_1 \sim C.$$

Mit (3) und (4) folgt hieraus, daß A_1, also auch A, einen zu B äquivalenten Teil enthielte. Das gleiche folgt aus (15) noch direkter und steht im Widerspruch zu der Voraussetzung $A < B$, die den Sätzen Ic und VI_2 gemeinsam ist.

Aus (9) aber würde folgen, daß auch B als zu A äquivalent einen mit C äquivalenten Teil besäße, und das widerstreitet $B < C$, der in Ic und VI_1 enthaltenen Voraussetzung.

Hiermit sind auch die Postulate Ic und VI als erfüllt nachgewiesen.

§ 10. Wenn A mit B äquivalent ist, so kann, wie gezeigt war, weder die Beziehung (B) noch die Beziehung (Γ) bestehen, d. h. es muß entweder (A) oder (Δ) zutreffen. Da beide sich logisch ausschließen, kann auch nur eines von beiden zutreffen. Als das

„**Problem der Trichotomie**" kann nun folgende Aufgabe bezeichnet werden:

Es sei für gewisse Dinge $A, B, \ldots$ eine Teilung und eine Vergleichung gegeben, die zusammen das Postulat IV erfüllen, so daß die Disjunktion VIII möglich ist. Es sollen folgende Fragen beantwortet werden:

1) **Sind die Fälle B, Γ möglich?**
2) **Welche der Beziehungen A, Δ hat im Falle der Äquivalenz statt?**
3) **Ist diese im Falle der Äquivalenz zutreffende Beziehung auch eine hinreichende Bedingung der Äquivalenz?**
4) **Ist eine der Beziehungen A, Δ überhaupt ausgeschlossen?**

Auf diese Fragen werden wir in den verschiedensten Fällen die verschiedensten Antworten erhalten. Zunächst beachten wir die Antwort, die der Satz vom Teil und Ganzen giebt. Er beantwortet nämlich die Frage (4) dahin, daß (A) unmöglich ist.

Wenn die Beziehung (A) gilt, d. h. wenn $A \sim B_1$, $B \sim A_1$, A_1 Teil von A, B_1 von B ist, so folgt aus $B \sim A_1$, daß auch A_1 einen Teil A_2 besitzt, und daß A_2 zu B_1 äquivalent ist. Danach ist aber erstens A_2 als Teil von A_1 auch Teil von A, zweitens wegen $A_2 \sim B_1$, $B_1 \sim A$ auch $A_2 \sim A$. Dies widerspricht dem Postulat vom Teil und Ganzen, d. h. der Satz vom Teil und Ganzen schließt die Beziehung (A) aus.

Hiermit sind auch die Fragen (1) und (2) erledigt. Im Falle der Äquivalenz hat die Beziehung (Δ) statt, und die Beziehung (B) ist möglich, wenn es überhaupt Teile giebt. Denn der Teil ist dann **kleiner** als das Ganze. Die Frage (3) wird durch den

Satz vom Teil und Ganzen nicht erledigt und bedarf einer gesonderten Behandlung, nämlich, sofern sie bejaht werden soll, des Nachweises folgenden Satzes:

IX. Ist kein Teil von A zu B und kein Teil von B zu A äquivalent, so ist A zu B äquivalent.

Wenn dieser Nachweis geführt ist, ist das Problem der Trichotomie in dem gewünschten Sinn gelöst, die Disjunktion VIII ist trichotom und der von (B, Γ) verschiedene Fall stimmt mit der Äquivalenz überein. —

Wir wollen aber auch die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß der Satz vom Teil und Ganzen nicht gilt, d. h. daß A einem seiner Teile, A_1, äquivalent sein kann. Ist dann auch $A \sim B$, so ist $B \sim A_1$. Andererseits enthält nach IV B einen Teil $B_1 \sim A_1$. also ist $B_1 \sim A$, d. h. aus $A \sim B$ folgt die Beziehung (A). Damit ist die Frage (2) beantwortet. Auf die anderen Fragen erhalten wir keine Antwort, dem negativen Charakter der Voraussetzung entsprechend, von der wir ausgingen.

Soll die Frage (3) im Falle der Nichtgültigkeit des Satzes $A_1 < A$ bejaht werden, so muß folgender Satz bewiesen werden:

X. (Äquivalenzsatz). Ist A_1 ein Teil von A, B_1 von B, $A_1 \sim B$, $B_1 \sim A$, so ist $A \sim B$.

Diesem Satz kann folgende engere Fassung gegeben werden:

Xa. Ist A_1 ein Teil von A, A_2 von A_1 und $A_2 \sim A$, so ist $A_1 \sim A$.

Aus dieser Fassung folgt wieder der weitere Äquivalenzsatz X. Denn es war bereits gezeigt, daß aus $A \sim B_1$, $B \sim A_1$ die Existenz eines Teils A_2 von A_1 folgt, der zu A äquivalent ist. Nach Xa ist demnach $A_1 \sim A$ und wegen $B \sim A_1$ auch $A \sim B$.

Nimmt man umgekehrt in X an, es sei B mit A_1 nicht nur äquivalent, sondern auch identisch, so erhält man Xa. Dieser

Satz ist also in der Tat eine engere Fassung des Äquivalenzsatzes, und zwar auch eine vorteilhaftere, weil nur eine Äquivalenz in den Voraussetzungen auftritt.

Die bis hierher recht abstrakten, dem Leser vielleicht auch höchst problematisch erscheinenden Ausführungen mögen noch durch einige Beispiele erläutert werden. — Bei der üblichen endlichen Messung gilt der Satz vom Teil und Ganzen, zugleich aber auch Satz IX, so daß der Satz VII zutrifft. Auch die Winkelmessung durch Scheitelstrahlenzerlegung verhält sich so. Sie operiert mit einer speziellen Teilung, die die Postulate Ia — IIIa, IV erfüllt. — Läßt man aber andere geradlinige Zerlegungen der Winkelfläche zu, so gilt der Satz vom Teil und Ganzen nicht mehr. Daß die dahinter gesuchte Paradoxie auf Grund unserer bisherigen Ausführungen keinen logischen Widerspruch einschließt, dürfte klargestellt sein. Man könnte nun immerhin geneigt sein, wenigstens die Unbrauchbarkeit der allgemeinen Teilung auf die Nichtgültigkeit des Satzes vom Teil und Ganzen zurückzuführen. Einmal aber werden wir in den Ausführungen über die Mengenlehre sehen, daß diese Nichtgültigkeit eine Teilung durchaus nicht unbrauchbar für die Definition einer Ordnung macht. Zum andern aber können wir jetzt die Ursache der Unbrauchbarkeit der allgemeinen Zerlegung am Beispiel des Winkels aufdecken. Es war nämlich im ersten Referat gezeigt, daß ein Winkel durch Zerschneiden in jeden andern verwandelt werden kann, d. h. daß zwischen zwei beliebigen Winkeln stets die Beziehung (A) besteht. Es ist daher allerdings die Frage (4) für (Δ) zu bejahen, ebenso ist (3) zu bejahen, aber die Frage (1) ist zu verneinen: Die Fälle (B, Γ) sind unmöglich. Hierin liegt der wahre Grund der Unbrauchbarkeit der freien Zerschneidung: in

der **Unmöglichkeit von** (B) **und** (Γ), nicht aber in der **Möglichkeit von** (A).

Zweiter Teil.

Äquivalenz, Teilmenge und Mächtigkeit.

V.

Vergleichung und Teilung der Mengen.

§ 11. Den Begriff der Menge in völlig einwandfreier Weise zu definieren ist bisher nicht gelungen. Wahrscheinlich darf auch hier eine Definition nicht verlangt werden, sondern nur ein Axiomsystem. Aber selbst das fehlt bis jetzt noch. Die üblichen Definitionen der Menge gestatten keinerlei brauchbare Schlüsse zu ziehen, andererseits aber passen unter sie auch paradoxe Mengen, auf die wir weiter unten zurückkommen werden. Da es andererseits widerspruchsfreie unendliche Mengen zu geben scheint, muß eine richtige Definition oder ein korrektes Axiomensystem paradoxe Bildungen ausschließen, wenn es zu einem brauchbaren System von Folgerungen Anlaß geben will.

Wir entwickeln die Grundbegriffe zunächst an den endlichen Mengen. Denken wir uns als ganz konkretes Beispiel etwa einen Korb Äpfel und einen Korb Birnen. Um zu prüfen, ob beide gleichviel Stücke enthalten, können wir so verfahren: Wir ergreifen mit der linken Hand einen Apfel, mit der rechten eine Birne und legen jedes Stück aus seinem Korb heraus. Dieses Verfahren wiederholen wir, solange es geht. Es wird nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einem Ende führen, und

zwar entweder dadurch, daß keine Äpfel mehr da sind, oder dadurch, daß keine Birnen mehr vorhanden sind, oder drittens dadurch, daß weder Birnen noch Äpfel mehr übrig bleiben. Im ersten Fall ist die Anzahl der Birnen, im zweiten die der Äpfel die größere, im dritten Fall sind die Anzahlen einander gleich.

Das hier angewandte Verfahren besteht in einer Zuordnung der Elemente zweier Mengen. Je ein Apfel und je eine Birne werden zu einem Paar vereint, und zwar ist jedem der beiden Stücke das andere eindeutig zugeordnet. Wir nennen eine solche Zuordnung „umkehrbar-eindeutig"[1]. Wir können nun das Kriterium der gleichen Anzahl formal so aussprechen, daß die Voraussetzung der Endlichkeit der verglichenen Mengen nicht darin auftritt. Da wir uns ja auch tatsächlich über diese Voraussetzung erheben wollen, sollen sogleich die Termini „Anzahl" und „gleich" durch die mengentheoretischen „Mächtigkeit" und „äquivalent" ersetzt und das Kriterium in die Form einer Definition gesetzt werden:

Zwei Mengen heißen „äquivalent" oder von „gleicher Mächtigkeit", wenn die Dinge der einen denen der andern umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können.

§ 12. Es ist natürlich noch nicht gesagt, daß dieser Definition auch für unendliche Mengen ein vernünftiger Sinn zukommt. Vielmehr ist bereits eines gewiß: das willkürliche Zuordnungsverfahren, wie es bei dem Beispiel der Äpfel und Birnen angewandt

---

[1]) Dedekind gebraucht hierfür das Wort ähnlich. Doch hat sich nach dem Vorgang von Georg Cantor dieses Wort für eine engere Bedeutung eingebürgert. Siehe Teil III.

wurde, ist für unendliche Mengen unbrauchbar, da es zu keinem Ende führt. Dagegen können solche Zuordnungen sehr wohl durch irgendwelche Gesetze hergestellt werden. Wie auch die Zuordnung hergestellt sei, jedenfalls läßt sich folgende Bezeichnungsweise anwenden: Ist m ein Ding der Menge M und n das zugeordnete einer äquivalenten Menge N, so schreiben wir die Tatsache der Zuordnung in Zeichen $n = \varphi(m)$, und sprechen von der Zuordnung φ. Daß umgekehrt m zu n zugeordnet ist, wird man zweckmäßig durch ein anderes Zeichen, etwa $\bar{\varphi}$, ausdrücken:

$$m = \bar{\varphi}(n).$$

Die Frage, ob es prinzipiell zulässig ist, eine Menge von unendlich vielen Dingen als ein abgeschlossenes Ganze zu betrachten, berührt die Zulässigkeit unsrer Definition der Äquivalenz nicht, zum mindesten nicht in ihrer praktischen Anwendung. Die Behauptung, „a ist ein Ding der Menge aller ganzen Zahlen," enthält lediglich die Aussage: „a ist eine ganze Zahl."

Da es aber auf diesem Standpunkt bezweifelt werden könnte, ob eine Menge genau genug definiert ist, um von der Identität zweier Mengen zu sprechen, so wollen wir folgende Definition ausdrücklich aufstellen, die ein Spezialfall der sogleich zu gebenden Definition der Teilung ist:

Zwei Mengen heißen identisch, wenn jedes Ding der einen auch ein Ding der andern ist und umgekehrt.

Die Zuordnung eines Dinges zu sich selbst ist umkehrbar eindeutig. Daher ist das Postulat IIIb erfüllt, wonach identische Mengen auch äquivalent sein sollen. — Von den beiden anderen Postulaten der Äquivalenz ist IIb in der Forderung der Umkehrbarkeit der Eindeutigkeit enthalten. Und daß auch Ib erfüllt ist, ergibt sich durch folgende Überlegung:

Wenn a zu b, b zu c zugeordnet ist, so ist damit eine Zuord-

nung zwischen a und c ausgesprochen; und wenn die Zuordnungen zwischen a, b und zwischen b, c umkehrbar eindeutig sind, so entsprechen sich auch a, c eindeutig. Der Beweis bedarf wohl keiner näheren Ausführung, zumal uns die Zuordnung zweier Mengen über eine dritte aus dem alltäglichen Leben geläufig ist. Die Probe auf die gleiche Stückanzahl in den oben erwähnten Obstkörben wird man nämlich lieber auf dem abstrakten Wege des Abzählens der Äpfel einerseits, der Birnen andererseits ausführen, als durch die zuerst beschriebene konkretere Methode des Ergreifens. Dieses Abzählen bedeutet aber nichts anderes, als daß man die Äpfel für sich und ebenso die Birnen den Dingen einer dritten gedachten Menge 1, 2, 3, 4, 5.... zuordnet.

§ 13. Ebenso wie wir die Vergleichung definierten, ohne über die Existenz unendlicher Mengen etwas auszumachen, können wir auch die Teilung einführen:

Eine Menge M_1 heißt Teil einer Menge M, wenn jedes Ding von M_1 ein Ding von M ist. Sie heißt eigentlicher Teil, wenn nicht jedes Ding von M auch Ding von M_1 ist.

Den Charakter dieser Definition als reiner Wortdefinition erkennt man leicht aus folgendem Beispiel: „Die Menge aller geraden Zahlen ist eine eigentliche Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen." Dieser Satz spricht die völlig einwandfreie Behauptung aus, daß jede gerade Zahl ganz, aber nicht jede ganze Zahl gerade ist.

Die Beweise zu den Postulaten Ia bis IIIa bedürfen keiner Ausführung. Bei dem Postulat IV ist folgendes nachzuweisen: Ist M zu N äquivalent, M_1 eine Teilmenge von M, so besitzt N eine zu M_1 äquivalente Teilmenge N_1. In der Tat überzeugt man

sich leicht, daß die den Elementen von M_1 entsprechenden Elemente von N eine Teilmenge N_1 von N bilden, die zu M_1 äquivalent ist. Die Definition von N_1 lautet also: „Ein Ding n von N wird als Ding von N_1 bezeichnet, wenn $m = \bar{\varphi}(n)$ in M_1 enthalten ist." Hierin bedeutet φ die Zuordnung $n = \varphi(m)$ von N zu M. N_1 wird man zweckmässig mit $\varphi(M_1)$ bezeichnen.

Wenn M_1 eine eigentliche Teilmenge von M ist, so muß es Elemente von M geben, die nicht in M_1 sind. Diese Elemente bilden die „zu M_1 komplementäre Teilmenge" von M; nennt man sie M_2, so ist jedes Ding von M entweder in M_1 oder in M_2 (d. h. nicht in M_1) enthalten. Zwei komplementären Teilmengen entspricht also eine vollständige Disjunktion. Entsprechend kann man komplementäre Systeme mehrerer Teilmengen bilden: Die Teilmengen $M_1, M_2, \ldots M_n$ von M bilden ein komplementäres System, wenn jedes Element von M in einer und nur einer von ihnen enthalten ist. Zum Beispiel sind die Mengen der geraden und der ungeraden Zahlen komplementäre Teilmengen der Menge der ganzen Zahlen, womit die Tatsache ausgesprochen wird, daß jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade ist. Die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen bilden ein komplementäres System von drei Teilmengen der Menge aller Zahlen. Komplementäre Systeme aus unendlich vielen Teilmengen werden wir späterhin zu betrachten haben, können aber vorläufig davon absehen. — Ist M_1 eine Teilmenge von M, so bezeichnet man zweckmäßig ihre komplementäre Menge mit $M - M_1$.

§ 14. Nach dem Beweis der Postulate I—IV können die Betrachtungen des vierten Kapitels einsetzen, durch die wir zu der vierfachen Disjunktion VIII gelangten.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß für endliche Mengen der

Fall (A) ausscheidet und der Satz IX gültig ist. Ob und wie dies zu beweisen ist, d. h. auf einfachere Tatsachen zurückgeführt werden kann, das darf zunächst außer Betracht bleiben, da über die Richtigkeit unserer Behauptung niemals ein Zweifel bestanden hat. Ja, man hat sie als Grundsatz vielfach dahin ausgesprochen, daß das Resultat des Abzählens einer endlichen Menge unabhängig ist von der Reihenfolge des Abzählens. Es wird daher eher einer Rechtfertigung bedürfen, wenn überhaupt der Versuch unternommen wird, die Eigenschaften endlicher Mengen durch eine weitausholende Betrachtung zu begründen, wie dies Dedekind getan hat [1].

Wir werden im nächsten Kapitel zunächst an dem wichtigsten Beispiel unendlicher Mengen zeigen, daß es unendliche Mengen gibt, die äquivalente Teile besitzen. Daran schließt sich naturgemäß die Frage an, ob jede unendliche Menge äquivalente Teile besitzt. Auf diese Frage ist aber eine einwandfreie Antwort nur möglich, wenn der Begriff der unendlichen Menge definiert wird. Die Definition „Unendlich heißt: nicht-endlich" gestattet ihrerseits wiederum keine Schlüsse, wenn nicht der Begriff „endlich" definiert oder wenigstens durch eine Anzahl von Axiomen hinreichend charakterisiert ist. Denn um einen Schluß ziehen zu können, bedürfen wir zweier Obersätze; die Behauptung, eine Menge sei nicht endlich, gibt nur den einen, der andere muß entweder aus der Definition des Endlichen abgeleitet sein oder aus dem Grundbegriff der Endlichkeit als Axiom entspringen. Dies ist die Schwierigkeit, die zu einer Kritik des Begriffs der endlichen Menge geführt hat.

Wir übergehen nun diese Schwierigkeit dadurch, daß wir

---

[1] „Was sind und was sollen die Zahlen?" Braunschweig 1888.

zunächst nur solche unendliche Mengen betrachten, die äquivalente eigentliche Teile besitzen. Solche Mengen nennen wir mit Georg Cantor transfinite Mengen. Da endliche Mengen keine äquivalenten Teile haben, steht zunächst fest, daß eine transfinite Menge nicht endlich sein kann. Die Frage umgekehrt, ob jede nicht endliche Menge transfinit ist, vertagen wir bis zum letzten Teil und verzichten solange auf eine Herleitung der bekannten Eigenschaften endlicher Mengen. Diesen Standpunkt der Kritik des Endlichen gegenüber kann man wohl treffend als den „naiven Standpunkt" bezeichnen, womit natürlich kein Werturteil ausgesprochen sein soll.

§ 15. Nachdem wir so die schwierige Frage, ob auch jede unendliche Menge Teile besitzt, die ihr äquivalent sind, vorläufig bei Seite geschoben haben, beweisen wir sogleich einen Satz, der das Schema des üblichen Nachweises der Unendlichkeit einer Menge enthält. Er lautet:

XI. Eine Menge, die eine transfinite Teilmenge enthält, ist selbst transfinit.

Sicher ist eine solche Menge nicht endlich, denn eine endliche Menge enthält keine unendliche, also auch keine transfinite Teilmenge. Unser Satz behauptet aber mehr, nämlich die Existenz einer Zuordnung ψ, die die Menge M auf eine Teilmenge abbildet.

Nach Voraussetzung besitzt M eine Teilmenge M_1, die selbst wieder einer eigentlichen Teilmenge M_2 von M_1 äquivalent ist. M_1 ist natürlich als eigentliche Teilmenge von M gedacht, da der Satz sonst zwar richtig, aber trivial wäre. Ihre komplementäre Menge $M—M_1$ heiße M_4. Die zu M_2 komplementäre Teilmenge von M_1 heiße M_3. M besteht also aus den drei komplementären Mengen M_2, M_3, M_4; nach Voraussetzung existiert eine Zuordnung

φ, die jedem Element x von M_1 (d. h. also von M_2 oder M_3) ein Element $\varphi(x)$ von M_3 zuordnet. Diese Zuordnung ergänzen wir dadurch zu einer Zuordnung ψ, daß wir jedes Element von M_4 sich selbst zuordnen. Die Zuordnung $\psi(x)$ ist also wie folgt definiert: $\psi(x)$ bedeutet x selbst, wenn x in M_4 ist. Ist dagegen x in M_2 oder M_3, so bedeutet $\psi(x)$ das bereits als definiert vorausgesetzte Element $\varphi(x)$ von M_3.

Diese Zuordnung ψ bildet M auf eine Teilmenge ab, und zwar eine eigentliche, nämlich auf die beiden Mengen M_3 und M_4, die zusammen die komplementäre Menge von M_2 bilden. Demnach ist M transfinit, was zu beweisen war.

Ebenso leicht beweisen wir folgenden Satz:

XII. Ist M eine transfinite, N eine zu M äquivalente Menge, so ist N transfinit.

Nach Voraussetzung ist $M \sim N$, $M \sim M_1$, M_1 Teil von M. Nach Postulat IV ist daher $M_1 \sim N_1$, N_1 Teil von N; nach Ib folgt aus $N_1 \sim M_1 \sim M \sim N$ auch $N_1 \sim N$, w. z. b. w.

Die weiteren Aufgaben, die sich nun zur Behandlung bieten, entsprechen den vier Fragen des Trichotomieproblems. Nachdem die Frage (2) durch den Nachweis transfiniter Mengen beantwortet sein wird (Kap. VI), erledigen wir (3) durch den Beweis des Äquivalenzsatzes Xa (Kap. VII). Endlich beantworten wir (1) durch die Aufweisung von Mengen verschiedener Mächtigkeit (Kap. VIII). Die Frage (4) wird ihre Behandlung und vorläufige Erledigung erst im Kapitel XXX finden. —

VI.

Die abzählbaren Mengen.

§ 16. Offenbar ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen positiven Zahlen $1, 2, 3 \ldots$ transfinit, denn die Gleichung $y = x+1$ ordnet jeder

ganzen Zahl x eine ganze Zahl y umkehrbar eindeutig zu. Unter den Zahlen y findet sich indessen die Zahl 1 nicht vor; es wird also $\mathfrak{G}$ auf die eigentliche Teilmenge $2, 3, 4 \ldots$ abgebildet.

Andere Abbildungen, die in gleicher Art zum Nachweis benutzt werden, sind beispielsweise $y = 2x$, $y = x^2$, allgemeiner $y = nx$ und $y = x^n$, worin n eine ganze positive Zahl ist. —

Die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$ ist die kleinste unendliche Mächtigkeit überhaupt und verdient daher eine besondere Bezeichnung. Man nennt eine Menge, die zu $\mathfrak{G}$ äquivalent ist, abzählbar. Daß insbesondere $\mathfrak{G}$ von allen transfiniten Mengen die kleinste Mächtigkeit besitzt, geht aus folgenden beiden Sätzen hervor:

XIII. Jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ist endlich oder abzählbar (d. h. $\sim \mathfrak{G}$).

XIV. Jede transfinite Menge enthält eine abzählbare Teilmenge.

Zum Beweis des ersten Satzes benutzen wir die Ordnung der ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Größe. Zwischen zwei ganzen Zahlen und auch unterhalb einer ganzen Zahl gibt es nur endlich viele, eventuell gar keine ganze Zahlen. Daraus folgt zunächst, daß jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$, in der es eine größte Zahl gibt, endlich ist. Danach ist nur noch der Fall möglich, daß eine Teilmenge M von $\mathfrak{G}$ kein größtes Element enthält. Dann muß es aber zu jeder Zahl x dieser Teilmenge eine nächstgrößere unter den Zahlen von M geben, die wir $\varphi(x)$ nennen wollen. Diese Zuordnung φ ordnet jedem Element von M ein anderes zu. Ferner ist klar, daß M eine kleinste ganze Zahl a enthalten muß. Nun bilde man die Zuordnung ψ auf folgende Art: $\psi(1) = a$, $\psi(2) = \varphi(a)$, $\psi(3) = \varphi(\varphi(a))$ etc., so erkennt man leicht, daß jedem Element von $\mathfrak{G}$ ein Element von M eindeutig zugeordnet wird.

Die Abzählbarkeit einer Menge M kann man mit Hülfe der

Ordnung von $\mathfrak{G}$ leicht schematisch zum Ausdruck bringen, indem man die Elemente von M hintereinander, nötigenfalls über oder unter die ganzen Zahlen schreibt:

$$\begin{matrix} a, & \varphi(a), & \varphi(\varphi(a)), & \varphi(\varphi(\varphi(a)))\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4,\ldots \end{matrix}$$

Ein solches Schema muß aber immerhin die Bildungsgesetze der abzählbaren Menge zum Ausdruck bringen oder als bekannt voraussetzen. Beispiele hierfür bieten die unendlichen Reihen, wie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ 142857\ldots\ldots$$

während Ausdrücke wie $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ kein Bildungsgesetz anzudeuten vermögen, es vielmehr als bekannt voraussetzen, sofern die Gleichungen richtig und keine approximativen sein sollen.

Der Satz XIV setzt voraus, daß M transfinit sei, d. h. daß jedem Element m von M ein Element $\varphi(m)$ einer Teilmenge M_1 von M zugeordnet sei. Es sei nun z ein Element von $M - M_1$, so gibt es, da $\varphi(m)$ stets in M_1 ist, kein Element x, für welches $\varphi(x) = z$ ist.

Aus z bilden wir die Elemente $\varphi(z) = z_1$, $\varphi(z_1) = z_2, \ldots$ $\varphi(z_k) = z_{k+1}, \ldots$ Wenn wir zeigen können, daß alle diese Elemente von einander verschieden sind, so ist unser Satz bewiesen; denn sie sind alle in M_1, bilden also sicher eine Teilmenge von M, und daß diese Teilmenge abzählbar ist, geht aus den Indices hervor, die bereits die Zuordnung zu $\mathfrak{G}$ ausdrücken.

Sicher ist z von allen Elementen z_k verschieden, da z in

$M-M_1$, $z_k = \varphi(z_{k-1})$ aber sicher in M_1 enthalten ist. Ist nun x von y verschieden, so folgt aus der umkehrbaren Eindeutigkeit der Zuordnung φ, daß auch $\varphi(x)$ von $\varphi(y)$ verschieden sein muß. Demnach ist $\varphi(z)$ von $\varphi(z_k)$, d. h. z_1 von z_{k+1} für jedes k verschieden, daher wieder $\varphi(z_1) = z_2$ von $\varphi(z_{k+1}) = z_{k+2}$ u. s. f. Damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Aus diesem Satz geht hervor, daß eine transfinite Menge nur von gleicher oder höherer Mächtigkeit sein kann, als 𝔊. Daß keine unendliche Menge überhaupt von niederer Mächtigkeit als 𝔊 sein kann, folgt schon aus XIII, doch ist damit noch nicht gesagt, daß sie von gleicher oder höherer Mächtigkeit sein muß, solange nicht die Unmöglichkeit des Falles (Δ) feststeht.

§ 17. Um zu weiteren speziellen abzählbaren Mengen zu gelangen, beweisen wir folgenden allgemeinen Satz:

XV. M sei eine abzählbare Menge, m_1, m_2, m_3, .. m_k, ... seien ihre Elemente, und jedes dieser Elemente sei wieder eine endliche Menge. Von den Dingen x dieser Mengen komme keines in zwei oder mehreren der Mengen m_1, m_2, .. m_k .. vor. Dann ist die Menge der Dinge x selbst abzählbar.

Wenn der Sinn des Satzes richtig verstanden ist, kann er auch in folgenden kürzeren Fassungen ausgesprochen werden:

Eine abzählbare Menge endlicher Mengen ist abzählbar, oder:

Ersetzt man in einer abzählbaren Menge jedes Element durch eine endliche Anzahl von Elementen, so entsteht wieder eine abzählbare Menge.

Der Beweis des Satzes ist fast trivial zu nennen, wenn man die letzte Fassung beachtet. Sind $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ .... die Dinge der

Menge m_k und n_k ihre Anzahl, so schreibe man die Dinge x in der durch die Indices gegebenen Reihenfolge an:

$$\overbrace{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_{n_1}^{(1)}}^{m_1}, \quad \overbrace{x_1^{(2)}, \quad x_2^{(2)}, \quad \ldots \quad x_{n_2}^{(2)}}^{m_2}, \quad \ldots \text{ u. s. f.}$$

$$1, \quad 2, \ldots n_1, \quad n_1+1, \; n_1+2, \ldots n_1+n_2, \ldots \text{ u. s. f.}$$

Man kann ohne weiteres die Zuordnung der Dinge x zu den ganzen Zahlen angeben. Der Menge m_k gehen die Mengen m_1 bis m_{k-1} voraus, sie liefern $n_1 + n_2 \ldots + n_{k-1}$ Elemente. Den Elementen $x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots x_l^{(k)} \ldots$ kommen daher die Ordnungszahlen $n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + 1$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + 2$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + l$ zu, womit die Abzählbarkeit erwiesen ist.

Eine stillschweigende Voraussetzung bei diesem Beweise ist die, daß an die n_k Elementen von m_k die unteren Indices 1, 2 bis n_k in irgend einer Art bereits verteilt sind. Dies kann für die unendliche Reihe $m_1, m_2, \ldots.$ nur durch ein Gesetz geschehen. Wie weit die Annahme der Existenz eines solchen Gesetzes zulässig ist, wird später noch untersucht werden, da die Frage von prinzipieller Bedeutung ist. Wir begnügen uns hier mit der Feststellung, daß bei allen Anwendungen des Satzes XV ein solches Gesetz stets aufgewiesen werden kann.

§ 18. Eine erste Anwendung des Satzes XV ist das folgende Theorem:

XVI. (Satz von der endlichen Bezeichnung). Es sei M eine unendliche, Z eine endliche Menge, deren Dinge $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ wir „Zeichen" nennen wollen. Jede Reihenfolge $z_a z_b z_c \ldots . z_k$ einer endlichen Anzahl von Dingen aus Z, in der jedes z mehrmals auftreten darf, soll eine „Bezeichnung" genannt

werden. Wenn jedem Ding m von M eine Bezeichnung $\varphi(m)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet ist, so ist M abzählbar.

In der Definition der Bezeichnungen ist die Reihenfolge betont, es sollen also z. B. $z_1 z_2$ und $z_2 z_1$ verschiedene Bezeichnungen sein.

Der Beweis ist ziemlich einfach. Die Menge der Bezeichnungen ist abzählbar; die Menge der den Dingen von M zugeordneten Bezeichnungen $\varphi(m)$ ist daher als Teilmenge der Menge aller Bezeichnungen nach Satz XIII ebenfalls abzählbar, also auch die zu ihr äquivalente Menge M selbst.

Daß aber die Menge Θ der Bezeichnungen abzählbar ist, folgt nach Satz XV. Sie zerfällt nämlich in eine abzählbare Reihe $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots \vartheta_k, \ldots$ von Mengen; die erste enthält alle Bezeichnungen, die aus einem Element von Z bestehen:

$$\vartheta_1 = z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n,$$

die zweite alle zweigliedrigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{llll} z_1 z_1, & z_1 z_2, & z_1 z_3, & z_1 z_4, \ldots \; z_1 z_n \\ z_2 z_1, & z_2 z_2, \ldots & & \qquad\quad z_2 z_n \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ z_n z_1, \ldots & & & \quad\; \ldots z_n z_n, \end{array}$$

die dritte alle dreigliedrigen, die $k$te alle $k$gliedrigen. Die Mengen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ sind endlich: ϑ_k enthält genau n^k Elemente. Diese können auch nach einem einheitlichen Gesetz geordnet werden, z. B. nach dem lexikographischen, sofern man ϑ_1 irgendwie willkürlich geordnet hat. Damit folgt aus Satz XV die Abzählbarkeit von Θ und daraus die von M. — Die Ordnungsnummer, die zu einer Bezeichnung $z_a z_b z_c \ldots z_p$ gehört, läßt sich auch

explicit angeben. Ist die Bezeichnung k-gliedrig, so ist ihre Ordnungsnummer gleich

$$a \cdot n^k + b \cdot n^{k-1} + c \cdot n^{k-2} + \ldots + p.$$

Die prinzipielle Bedeutung des Satzes XVI geht daraus hervor, daß das Alphabet eine endliche Menge von Zeichen enthält, daß also die Menge aller Wortbildungen, insbesondere der sinnvollen, abzählbar ist. Eine darauf gegründete Paradoxie wird später zu erledigen sein (Kap. XXIII).

Aber auch die Menge der Ziffern 0, 1, 2, bis 9 ist eine endliche; mit ihr bezeichnen wir alle ganze Zahlen, deren Menge in der Tat abzählbar ist. Ferner erweist sich die Menge aller Dezimalzahlen (d. h. Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist) als abzählbar, denn zur Bezeichnung dienen die zehn Ziffern und das Komma. Die Dezimalzahlen sind eine Teilmenge der Menge aller Brüche überhaupt. Da aber jeder Bruch mit den zehn Ziffern und einem Doppelpunkt (3 : 4) bezeichnet werden kann, ist die Menge aller Brüche, d. i. der Rationalzahlen abzählbar. Aber auch die Menge aller algebraischen Zahlen läßt sich abzählen. Algebraisch heißt eine Zahl α, wenn sie einer Gleichung von folgender Form genügt:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots a_n\alpha^n = 0,$$

in der $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bis a_n ganze Zahlen, positive oder negative, sind. Unter allen Gleichungen, denen eine algebraische Zahl genügt, gibt es eine bevorzugte, die irreduzible. Sie ist von nicht-höherem Grade n als jede andere, und die Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ haben keinen gemeinsamen Teiler; a_n ist positiv. Die n Wurzeln dieser Gleichung sind alle von einander verschieden und, was hier übrigens belanglos ist, die Gleichung ist für jede ihrer Wurzeln die irreduzible Gleichung. Die n Wurzeln lassen sich, auch wenn sie

imaginär sind, nach einem einheitlichen Prinzip ordnen; als erste, zweite, ... n-te.

Demnach ist eine algebraische Zahl eindeutig definiert durch Angabe der Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$, d. h. der Koeffizienten ihrer irreduzibeln Gleichung, und der Ordnungsnummer k, die ihr unter den Wurzeln dieser Gleichung zukommt. Schreiben wir dafür etwa

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, k]$$

so ist α eindeutig beschrieben durch 12 Zeichen: die 10 Ziffern, das Komma und den Minusstrich vor den negativen Koeffizienten. Z. B. wäre

$$\alpha = [-3, 0, 1, 2]$$

die zweite Wurzel der (irreduzibeln) Gleichung

$$-3 + \alpha^2 = 0,$$

d. h., wenn wir der Größe nach ordnen, die positive Wurzel aus 3, $\alpha = 1{,}732 \ldots$

Die angegebene Bezeichnungsweise ist eine endliche; damit folgt aus Satz XVI die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen.

§ 19. Eine weitere Folgerung aus Satz XV ist:

XVII. Eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Diesen Satz pflegt man auch, seiner geometrischen Bedeutung wegen, als den Satz von der Abzählbarkeit des Punktgitters zu bezeichnen.

Nach Voraussetzung ist eine Reihe $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von Mengen gegeben, und jeder Menge ist umkehrbar eindeutig eine ganze Zahl zugeordnet, die wir ihren Index nennen wollen und

ihr auch als Index anhängen. Indem wir alle diese Mengen zusammenfassen, entsteht eine Menge M, und jedes Element m von M ist in einer bestimmten Menge M_k enthalten. Den Index dieser Menge setzen wir dem Element als e r s t e n Index an. Da weiter die Abzählbarkeit von M_k angenommen ist, existiert eine Zuordnung, die dem Element m in M_k eine bestimmte Zahl n zuordnet. Diese nennen wir den z w e i t e n Index von m und bezeichnen jetzt m kurz durch die beiden Indices: $m = (k, n)$. Der erste gibt die Teilmenge M_k an, in der m zu suchen ist, der zweite gibt die Stelle an, die m in M_k einnimmt.

Die Abzählbarkeit von M folgt nun unmittelbar nach XVI daraus, daß jedes Indicespaar (k, n) durch die zehn Ziffern und ein Komma bezeichnet wird.

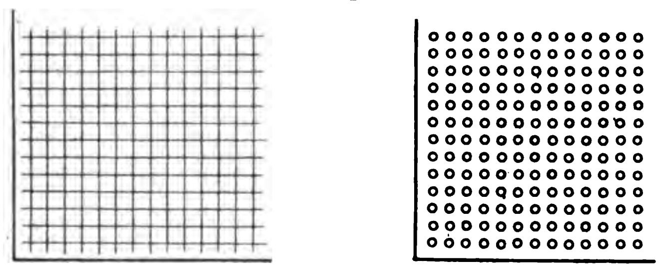
Um die Abzählbarkeit der Menge M aller Indizespaare (k, n) noch auf einem zweiten Wege nachzuweisen, bilden wir die Summe $k+n$ der beiden Indices des Paares. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Paaren, die eine vorgeschriebene Summe s liefern, nämlich $(1, s-1)$, $(2, s-2)$, $(3, s-3)$, bis $(s-1, 1)$. Ihre Anzahl ist $s-1$, diese Zahl nennen wir die H ö h e des Indicespaares (k, n). Sie ist eine endliche Zahl.

Es sei jetzt N_h die Menge aller Paare von der Höhe h. Sie ist endlich. Die Menge der Mengen N_h ist, wie der Index zeigt, abzählbar. Die Menge aller Elemente der Mengen N_h ist aber mit der Menge M identisch, also ist M nach Satz XV abzählbar.

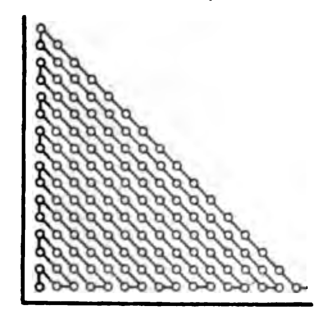
Die bereits erwähnte geometrische Interpretation erhält man, wenn man die beiden Indices nach den Methoden der analytischen Geometrie als Abscisse und Ordinate auf zwei Axen, am einfachsten rechtwinkligen, aufträgt. In der Figur sind zudem die Einheiten auf beiden Axen gleich groß gewählt. Man erhält für die ersten Indices die Teilpunkte 1, 2, 3, etc. auf der horizon-

talen Axe, in denen Lote nach oben errichtet werden. Den zweiten Indices entsprechen die Punkte der vertikalen Axe mit den auf ihr nach rechts errichteten Loten. Der Schnitt zweier Lote wird dem Element mit den beiden Indices der Lote zugeordnet. Jedes Lot auf der horizontalen Axe enthält die Punkte, die einer der Mengen M_k angehören. Die Lote selbst bilden ersichtlich eine abzählbare Menge.

Denkt man sich die Schnittpunkte markiert und die Lote



entfernt, so entsteht die als Punktgitter bezeichnete Figur, deren Abzählbarkeit wir nachgewiesen haben. Fassen wir in ihr die Punkte zusammen, die Indicespaaren von gleicher Höhe entsprechen,



so erhalten wir die in der nächsten Figur eingetragenen Diagonalen, die sich durch die vertikalen und horizontalen Verbindungsstücke in einen einzigen Linienzug vereinigen lassen, der jeden Gitterpunkt treffen muß. Diesem Linienzug entspricht eine Anordnung aller Indicespaare von gleicher Höhe, bei der alle Paare von gleicher gerader Höhe nach dem vorderen, alle von gleicher ungerader nach dem hinteren Index geordnet sind. Natürlich gibt es noch andere Ordnungen, die aber geometrisch weniger einfach aussehen; umgekehrt gibt es geometrisch ele-

gante Ordnungen, die abstrakt schwieriger zu beschreiben sind, z. B. die folgende: (1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (3, 4), (2, 4), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 1), (6, 2) etc.

Auf diesem Wege gelangt man zu einer hübschen Abzählung der rationalen Zahlen. Jede rationale Zahl wird in einfachster Weise als Bruch $a : b$ zweier teilerfremder Zahlen dargestellt. Den beiden Zahlen a, b entspricht ein Punkt des Gitters, und jedem Gitterpunkt, dessen Indices (Koordinaten) teilerfremd sind, entspricht eine rationale Zahl in ihrer Normaldarstellung. Damit werden die rationalen Zahlen auf die nebenstehend dargestellte Teilmenge des Punktgitters abgebildet und nach dem Höhenverfahren in eine Reihe gebracht, die so beginnt: 1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, 5, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, 6, 7, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{2}$, 8, 9 . . .

Die Figur des Punktgitters enthält auch die Anordnung der rationalen Zahlen nach ihrer natürlichen Größe. Zieht man nämlich von dem Schnittpunkt der Axen aus Strahlen nach den Gitterpunkten, so ordnen sich diese nach demselben Gesetz, wie die rationalen Zahlen: liegt von drei Rationalzahlen a, b, c der Größe nach b zwischen a und c, so liegt auch der b entsprechende Scheitelstrahl zwischen den zu a und c gehörigen. —

Aus Satz XVII folgt nun unmittelbar, daß auch die Menge

aller Indicestripel (α, β, γ) abzählbar ist; denn zunächst ist die Menge aller Tripel mit gleichem vorderem Index α abzählbar, da jedes Element in ihr durch das Paar (β, γ) eindeutig charakterisiert ist. Die Menge aller Mengen M_α von gleichem vorderen Index α ist aber ersichtlich selbst abzählbar, wonach aus XVII die Abzählbarkeit aller Tripel folgt. Den Indextripeln entspricht geometrisch ein räumliches Punktgitter.

Durch Schluß von n auf $(n+1)$ beweisen wir weiter, daß jede Menge abzählbar ist, in der jedes Element durch n Indizes aus der Reihe der ganzen Zahlen eindeutig charakterisiert ist. Von da aus endlich folgt, daß eine Menge M auch dann abzählbar ist, wenn jedes Element durch eine endliche, aber an sich beliebig große Zahl von Indices bestimmt wird. Denn eine solche Menge zerfällt in die Teilmengen $M_1, M_2, M_3, \ldots M_k, \ldots$, von denen M_1 alle Elemente mit einem, M_2 mit zweien, M_k mit k Indices enthält. Jede dieser Mengen ist abzählbar, die Reihe $M_1, M_2, \ldots$ selbst auch, woraus die Abzählbarkeit von M folgt. Dieses letzte Resultat zeigt wiederum die Abzählbarkeit aller algebraischen Zahlen, von denen jede durch die $n+2$ Indices $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, k$ charakterisiert ist, wobei n endlich, aber keiner oberen Schranke unterworfen ist[1].

§ 20. Die speziellen hier angeführten Beispiele der rationalen, dezimalen und algebraischen Zahlen sind bekannt dafür, daß sie einen völlig überraschenden Eindruck bei jedem hervorrufen, der sie zum ersten Male kennen lernt. Das Überraschende liegt darin, daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen stets

[1] Daß hierbei auch negative Indizes auftreten, ist belanglos, da auch die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen wie folgt abzählbar ist:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots k, -k, k+1 \ldots \text{ etc.}$$

noch unendlich viele rationale Zahlen liegen, daß es zu keiner rationalen Zahl eine der Größe nach unmittelbar folgende gibt. Indem wir zwischen je zwei aufeinander folgende ganze Zahlen noch unendlichviele rationale und algebraische Zahlen einschieben, haben wir das Gefühl, den Zahlbereich unendlich zu erweitern. Unsere Betrachtungen zeigen, daß diese Erweiterung wohl eine Menge von neuer Anordnung, nicht aber von neuer Mächtigkeit erzeugt hat.

Die Untersuchung der Mächtigkeit läßt die Anordnungsfrage völlig aus dem Spiel. Die Abbildung der rationalen auf die ganzen Zahlen zerstört die Anordnung der rationalen Zahlen ihrer natürlichen Größe nach völlig und von Grund aus. Ebensogut aber kann man auch sagen, daß sie die der ganzen Zahlen zerstöre. Daß wir dies praktisch nicht taten, vielmehr die rationalen Zahlen in eine Reihe hintereinander schrieben, lag nur an der rein technischen Bequemlichkeit: es ist zu umständlich, die durch die Zuordnung definierte Funktion $\varphi(x)$ explizite aufzustellen, die jeder rationalen Zahl umkehrbar eindeutig eine ganze Zahl zuordnet. Wir brachten daher nach dem Prinzip des § 16 ihr Bildungsgesetz durch Anschreiben einer endlichen Anzahl Terme zum Ausdruck. —

Wir sehen aus dem Voranstehenden, daß es wohl gewisse natürliche Ordnungen einer Menge geben kann, daß dies aber nicht notwendig die einzigen sind. Die Anordnungen der rationalen Zahlen nach Größe und Höhe sind völlig verschieden. So können wir auch die ganzen Zahlen auf die verschiedensten Arten ordnen, nicht nur nach dem üblichen Schema: 1, 2, 3, 4, ... Ein reichhaltiges Hülfsmittel bieten hierzu die Primzahlen. Jede ganze Zahl ist eindeutig in Primfaktoren zerlegbar. Wir können danach die Menge $\mathfrak{G}$ zunächst in abzählbar viele Mengen $G_1, G_2, G_3, \ldots G_\lambda,$

zerlegen, von denen G_k alle Zahlen enthält, die genau k Primfaktoren enthalten. G_1 enthält alle Primzahlen. $16 = 2^4$ gehört nach G_4, $27 = 3^3$ nach G_3, ebenso $30 = 2 . 3 . 5$ etc.

G_k können wir wieder in abzählbar viele Mengen G_{k1}, G_{k2}, $G_{k\nu}$ zerlegen, von denen G_{k1} alle Zahlen enthält, deren kleinster Faktor 2, G_{k2} alle deren kleinster Faktor 3 ist, G_{k3} alle mit 5 als kleinstem Faktor etc. Jede dieser Mengen kann wieder nach dem kleinsten zweiten Faktor gespalten werden u. s. f. Bei solchem Verfahren wird G in unendlich viele Mengen abzählbarer Mengen gespalten, die wieder der verschiedensten Anordnungen fähig sind. Trotzdem bleibt natürlich die Mächtigkeit stets die gleiche.

Es gibt auch Mengen, denen eine natürliche Ordnung von Hause aus gar nicht zukommt. So z. B. Mengen von Funktionen. Besteht zwischen x und y eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, so heißt y eine rein-algebraische Funktion von x. Dem Laien wird kaum eine Methode bekannt sein, Funktionen zu ordnen, da sie keine Größen, vielmehr Beziehungen zwischen veränderlichen Größen darstellen. Trotzdem ist die Menge aller rein-algebraischen Funktionen abzählbar, also in eine Reihe zu ordnen.

Ob daher durch Äquivalenzen Ordnungen zerstört oder geschaffen werden, ist für die Mächtigkeitsbetrachtungen selbst völlig belanglos. Daß sich uns die Ordnungsverwandlungen aufdrängen, liegt daran, daß gewisse Mengen natürliche Ordnungen besitzen, von deren Betrachtung wir uns nicht völlig loslösen können. Die Bedeutung der natürlichen Ordnungen wird von der Mengenlehre keineswegs unterschätzt, nur gehört sie in ein anderes Kapitel als in das der Mächtigkeiten. Wenn hier trotzdem darauf eingegangen wurde, geschah es, um denjenigen

Lesern, die zum ersten Male mengentheoretische Betrachtungen in die Hand nehmen, über das instinktive Gefühl der Befremdung hinauszuhelfen, das die Umordnung der rationalen und algebraischen Zahlen hervorzurufen pflegt.

VII.

Der Äquivalenzsatz.

§ 21. Die allgemeine Bedeutung des Äquivalenzsatzes und seine zweifache Fassung sind bereits im vierten Kapitel besprochen worden. Für die Mächtigkeit der Mengen ist der Satz zuerst und nahezu gleichzeitig von Schröder und Bernstein bewiesen worden. Der Schröder'sche Beweis arbeitet mit Logikkalkul und ist nur in einer Skizze veröffentlicht. Ich gebe daher den Bernstein'schen Beweis für die engere Fassung mit einigen Abänderungen wieder.

Angenommen ist, daß die Menge A eine Teilmenge A_1 und diese wieder eine Teilmenge A_2 besitze; diese Teile sollen eigentliche sein, da sonst der Satz trivial ist. A_2 sei zu A äquivalent, d. h. es existiere eine Zuordnung φ, welche jedem Element a in A ein Element $\varphi(a)$ von A_2 umkehrbar eindeutig zuordnet, so daß $\varphi(a)$ jedes Element von A_2 darstellen kann, also die inverse Zuordnung $\overline{\varphi}$ jedem Element a_2 von A_2 ein Element $\overline{\varphi}(a_2)$ von A zuordnet. Der Äquivalenzsatz behauptet die Existenz einer Zuordnung ψ, welche jedem Element a von A ein Element $\psi(a)$ von A_1 zuordnet, so daß zu jedem Element a_1 von A_1 auch ein Element $\overline{\psi}(a_1)$ von A gehört.

Zum Beweise bilden wir ein komplementäres System von fünf Teilmengen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 in A. Es sei $B_1 = A - A_1$,

$B_2 = A_1 - A_2$, so daß zunächst B_1, B_2, A_2 ein komplementäres System von A bilden. A_2 zerlegen wir nun folgendermaßen:

Es sei x ein Element in B_1, so ist $\varphi(x)$ ein Element in A_2, da jedes Element $\varphi(a)$ in A_2 ist. Wir rechnen $\varphi(x) = x_1$, $\varphi(x_1) = x_2$, $\varphi(x_2) = x_3, \ldots \varphi(x_k) = x_{k+1}$ etc. zu einer Teilmenge B_3 von A_2.

Es sei ferner y ein Element in B_2 so rechnen wir die Elemente $\varphi(y) = y_1$, $\varphi(y_1) = y_2, \ldots \varphi(y_k) = y_{k+1}$ u. s. f. zu einer Teilmenge B_4 von A_2.

Ist z irgend ein Element in A_2, so hat $\bar{\varphi}(z)$ einen Sinn und bedeutet entweder ein Element von B_1 oder von B_2 oder von A_2. Im ersten Fall ist z als Element von B_3, im zweiten von B_4 definiert. Im dritten Falle hat $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}(z)) = \bar{\varphi}(\bar{z}_1) = \bar{z}_2$ wieder einen Sinn, und ist auch $\bar{z}_2$ in A_2, so existiert weiterhin $\bar{\varphi}(\bar{z}_2) = \bar{z}_3$; allgemein muß für jedes Element z in A_2 einer der beiden Fälle eintreten: die Reihe $z, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \ldots (\bar{\varphi}(\bar{z}_k) = \bar{z}_{k+1})$ bricht ab, oder sie bricht nicht ab. Im letzteren Falle rechnen wir z zu der Menge B_5. Bricht die Reihe ab, so hat sie ein letztes Element $\bar{z}_k$, und es ist $\bar{z}_k$ nicht in A_2, da es sonst noch ein Element $\bar{z}_{k+1} = \bar{\varphi}(\bar{z}_k)$ gäbe. Daher ist $\bar{z}_k$ entweder in B_1 und $z = \varphi^k(\bar{z}_k)$, also nach Definition von B_3 in B_3, oder es ist $\bar{z}_k$ in B_2 und daher nach Definition z in B_4.

Hiermit haben wir zunächst gezeigt, daß unsere Disjunktion in der Tat vollständig, also B_1 bis B_5 ein komplementäres System ist. Die Mengen B_1 bis B_4 existieren sicher. Ob es Elemente gibt, die nach B_5 gehören, steht nicht fest, ist aber auch belanglos.

Nunmehr definieren wir die gesuchte Zuordnung ψ:

1. Ist x ein Element in B_2, B_4 oder B_5, so sei $\psi(x) = x$.
2. Ist x ein Element in B_1 oder B_3, so sei $\psi(x) = \varphi(x)$.

Diese Zuordnung ist eindeutig, weil die Identität wie auch φ eindeutig sind und x nur unter 1 oder nur unter 2 fallen kann. Da es unter einen von beiden Fällen zu finden sein muß, ist auch $\psi(x)$ für jedes x in A definiert.

$\psi(x)$ ist stets in A_1. Denn ist x in B_2, B_4 oder B_5, so ist auch $\psi(x) = x$ in B_2, B_4 oder B_5, also in A_1. Ist x in B_1 oder B_3, so ist $\psi(x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ aber nach Definition in A_2, also a fortiori in A_1. Außerdem ist in diesem Fall $\varphi(x)$ speziell in B_3, woraus hervorgeht: Fällt y unter 1, x unter 2, so ist $\psi(y)$ von $\psi(x)$ sicher verschieden.

Daraus folgt sofort die Umkehrbarkeit: Denn $\psi(x) = \psi(y)$ ist nur möglich, wenn x, y beide unter 1 oder beide unter 2 fallen. Im ersten Falle folgt aus der Definition von ψ: $x = y$, im zweiten $\varphi(x) = \varphi(y)$, und daraus wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit von φ wiederum $x = y$.

Somit ist nur noch zu zeigen, daß auch jedem Element z in A_1 ein Element x durch $\psi(x) = z$ zugeordnet wird. Nun ist z entweder in B_2 oder B_3 oder B_4 oder in B_5; ist es in B_2, B_4 oder B_5, so ist $\psi(z) = z$; ist z in B_3, so ist es in A_2, also gibt es ein x, für das $\varphi(x) = z$. Es ist aber x nach Definition von B_3 entweder in B_3 selbst oder in B_1, also $\varphi(x) = \psi(x)$, d. h. $\psi(x) = z$.

Hiermit ist gezeigt, daß ψ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von A und A_1 herstellt, d. h. es ist $A \sim A_1$, was zu beweisen war.

§ 22. Ein einfaches Beispiel mag die Beweisführung veranschaulichen: Die Menge A_2 der vielfachen von 4 ist eine Teilmenge der geraden Zahlen, diese wieder der ganzen. Die Menge der geraden Zahlen heiße A_1, die der ganzen A. Die Gleichung $y = 4x$ ordnet jedem Element x von A ein Element y von A_2 zu, es ist

also $A \sim A_2$. Gesetzt, wir wüßten die Äquivalenz von A_1 und A nicht herzustellen, (was natürlich durch $z = 2x$ sofort erledigt ist), so würde der Äquivalenzsatz zu folgendem Verfahren anleiten:

A_1 ist die Menge der geraden, also B_1 die der ungeraden Zahlen $2k-1$. A_2 ist die Menge der geraden Vielfachen von 2, A_1 die aller Vielfachen von 2, also B_2 die Menge der ungeraden vielfachen von 2, $2(2k-1)$. Um endlich A_2 zu zerlegen, haben wir aus y rückwärts $x = \frac{y}{4}$ zu bestimmen. Ist x noch in A_2, also weiter durch 4 teilbar, so ist $x : 4 = y : 16$ zu ermitteln u. s. f. Die Reihe der Zahlen $y : 4^{\nu}$ bricht sicher ab, es gibt also zunächst keine Menge B_s. Ist die letzte z der Zahlen $y : 4^{\nu}$ ungerade, also in B_1, so rechnet $y = 4^{\nu}(2k-1)$ zu B_3. Ist dagegen z gerade, so ist es nur noch durch 2, nicht mehr durch 4 teilbar, also $y = 4^{\nu}.2(2k-1)$; diese Zahl rechnet zu B_4, weil $2(2k-1)$ zu B_2 rechnet.

Die gesuchte Zuordnung ist daher die folgende:

1. Ist x von einer der Formen $2(2k-1)$ oder $4^{\nu}.2(2k-1)$, so setze man $\psi(x) = x$.
2. Ist x von einer der Formen $(2k-1)$ oder $4^{\nu}.(2k-1)$, so setze man $\psi(x) = 4x$.

Die Zuordnung ist nicht kompliziert, immerhin aber weniger einfach, als die Zuordnung $\chi(x) = 2x$. Sie sieht schematisch so aus:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, . . .
4, 2, 12, 16, 20, 6, 28, 8, 36, 10, 44, 48, 52, . . .

und ordnet offenbar die geraden Zahlen nicht nach ihrer Größe.

§ 23. Eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Äquivalenzsatz ist die folgende:

XVIII. Die Mächtigkeit einer transfiniten Menge

ändert sich nicht, wenn man ein Element hinzufügt.

Ist M transfinit, so ist $M \sim M_1$ und $M - M_1$ enthält mindestens ein Element m. Es ist aber $M - m$ eine Teilmenge von M und M_1 wieder eine Teilmenge von $M - m$, denn jedes Element von M_1 ist in M, aber von m verschieden, also auch in $M - m$ enthalten. Nach dem Äquivalenzsatz ist daher auch $M \sim M - m$.

Es sei nun (M, u) die Menge, die durch Hinzufügen eines nicht in M enthaltenen Elementes u aus M entsteht. Wir besitzen eine Zuordnung ψ, die jedem Element von $M - m$ ein Element von M eindeutig zuordnet. Setzen wir noch $\psi(m) = u$, so haben wir die Elemente von M und (M, u) einander umkehrbar eindeutig zugeordnet, was zu beweisen war.

Der Satz folgt auch leicht aus XIV; M besitzt eine abzählbare Teilmenge $z_1, z_2, z_3, \ldots$, ihr füge man $z_0 = u$ zu und ordne jedes Element z_k seinem folgenden zu. — Analog beweist man, daß durch Hinzufügen einer abzählbaren Menge die Mächtigkeit keiner transfiniten Menge geändert wird. —

VIII.

Die Existenz verschiedener Mächtigkeiten.

§ 24. Im folgenden werden wir zwei Methoden angeben, um aus einer Menge M eine neue M von folgender Eigenschaft herzustellen:

(1) M ist zu M nicht äquivalent.

(2) M ist einer Teilmenge von M äquivalent.

Aus (2) folgt, daß zwischen M und M weder die Beziehung (Δ) noch $\mathsf{M} < M$ bestehen kann. Aber auch (A) ist ausgeschlossen,

da nach dem Äquivalenzsatz aus ihr $M \sim \mathsf{M}$ im Widerspruch mit (1) folgen würde. Es ist also M eine Menge von größerer Mächtigkeit als M.

Der Beweis der Beziehung (1) wird sich stets auf folgenden Satz stützen:

(3) *Jede zu M äquivalente Teilmenge von M ist eine eigentliche Teilmenge von M; sie definiert nämlich ein in ihr nicht enthaltenes Element von M.*

Da M nicht eine eigentliche Teilmenge von sich selbst sein kann, folgt daraus (1).

Die Menge M definieren wir zunächst durch folgende Festsetzung:

α wird Element von M genannt, wenn es eine Teilmenge von M ist.

Da alle *Elemente* von M auch als *Teilmengen* von M gelten sollen, ist jedenfalls die Beziehung (2) klargestellt.

Sei nun N eine Teilmenge von M und $\mathsf{N} \sim M$, so ist jedem Element a von M ein Element α von N zugeordnet. Da α eine Teilmenge von M ist, kann a in α enthalten sein. Wir nennen es dann ein x-Element von M. Ist dagegen a nicht in α enthalten, so nennen wir es ein y-Element. Jedes Element von M ist entweder ein x- oder y-Element und nur eins von beiden.

Zunächst erledigt sich leicht der Fall, daß gar keine y-Elemente vorhanden sind. Es spaltet sich in zwei Unterfälle: Erstens kann jedes Element von N eine Teilmenge sein, die nur *ein* Element von M enthält. Sind dann p, q zwei Elemente von M, so ist (p, q) eine Teilmenge von M, die nicht in N vorkommt. Zweitens finde sich unter den Elementen von N eine aus mehreren Elementen von M bestehende Teilmenge von M. Sie ist einem Element a

zugeordnet und a ist eine Teilmenge von M, die in N nicht vorkommt; denn da sie nur ein Element a enthält, müßte sie diesem zugeordnet sein, a ist aber schon vergeben.

Zu einem der originellsten Schlüsse, den wir unter den Paradoxieen wieder antreffen werden, gibt jetzt der zweite Fall Anaß: Angenommen, es existieren y-Elemente, dann kann die Teilmenge Y von M, welche aus diesen y-Elementen und nur diesen besteht, nicht in N enthalten sein.

Wäre dies nämlich der Fall, so wäre ihr ein Element z in A zugeordnet. Wäre z ein y-Element, so hieße dies nach der Definition der y-Elemente, daß es in der zu z gehörigen Teilmenge Y nicht enthalten sei. Nach der Definition von Y dagegen müßte es in ihr enthalten sein. Wäre andererseits z ein x-Element, so hieße dies nach der Definition der x-Elemente, daß es in der zu z gehörigen Menge Y enthalten sei, woraus aber nach der Definition der Menge Y folgen würde, daß es ein y-, also kein x-Element wäre.

Also kann Y kein Element in N sein, womit (3) erwiesen ist.

§ 25. Zu einer zweiten Menge M gelangen wir durch die allgemeine Ausbildung des Funktionsbegriffes. Sei ein Gesetz gegeben, welches jedem Element x einer Teilmenge M_1 von M ein Element y von M zuordnet, so nennen wir dieses Gesetz eine „Funktion φ in M" und schreiben $y = \varphi(x)$. Daß es wirklich Funktionen gibt, beweisen folgende Spezialfälle: $\varphi(x) = x$; $\varphi(x) = a$, worin a ein bestimmtes Element von M ist; oder $\varphi(x) = a$ für jedes von a verschiedene x, $\varphi(a) = b$, worin b ein weiteres bestimmtes Element in M ist.

Ist M_1 eine eigentliche Teilmenge von M, so wollen wir φ eine „unvollständige" Funktion nennen. Ist z ein Element in M,

aber nicht in M_1, so ist $\varphi(z)$ unbestimmt, was durch die Gleichung $\varphi(z) = u$ ausgedrückt sei; u darf natürlich nicht als Zeichen für ein Element in M gebraucht sein. In diesem Sinne wäre z. B. $\sqrt{x}$ im Gebiet der reellen Zahlen nur für positive x definiert, also unvollständig; im Gebiet der ganzen Zahlen wäre es nur für die Menge der Quadratzahlen definiert. — Eine Funktion, die für alle Elemente von M definiert ist, soll dementsprechend „vollständig“ heißen.

Zwei Funktionen heißen gleich, wenn sie jedem Element von M das gleiche Element zuordnen und für dieselben Elemente unbestimmt sind; d. h. es muß für jedes x in M $\varphi(x) = \psi(x)$ sein. Zwei Funktionen sind daher verschieden, wenn für irgend ein spezielles Element a $\varphi(a)$ von $\psi(a)$ verschieden ist.

Zwei Funktionen heißen dagegen „total verschieden,“ wenn für jedes x in M $\varphi(x)$ von $\psi(x)$ verschieden ist. Zu jeder Funktion $\varphi(x)$ lassen sich auf die mannigfachste Weise total verschiedene Funktionen angeben. Seien z. B. a und b zwei nicht identische Elemente in M; wir setzen $\psi(x) = a$, wenn $\varphi(x)$ von a verschieden ist, und $\psi(x) = b$, wenn $\varphi(x) = a$ ist. Dann sind φ und ψ total verschieden.

Die Menge Φ aller Funktionen in M genügt jedenfalls der Forderung (2), denn ich kann dem Element a die durch $\varphi(x) = a$ definierte Funktion umkehrbar eindeutig zuordnen.

Zweitens ist auch (1) erfüllt, denn ich kann einer Teilmenge M_1 von M eine Funktion $\varphi(x)$ umkehrbar eindeutig durch folgende Festsetzung zuordnen: Sei $\varphi(x) = a$ für alle x in M_1, $\varphi(x) = b$ für alle nicht in M_1 enthaltenen x von M, wobei a und b nicht identische Elemente in M seien. Da somit eine Teilmenge aller Funktionen äquivalent der zuerst definierten Menge M aller Teilmengen von M ist, kann die Menge Φ aller Funktionen in M

nicht zu $\mathfrak{M}$ äquivalent sein. Denn dann wäre M einer Teilmenge von $\mathfrak{M}$ äquivalent, woraus wegen (2) nach dem Äquivalenzsatz gegen (1) M $\sim$ $\mathfrak{M}$ folgen müßte.

Man kann nur die Nichtäquivalenz von Φ und $\mathfrak{M}$ auch ohne den Umweg über M direkt durch Satz (3) beweisen. Sei F eine zu $\mathfrak{M}$ äquivalente Teilmenge von Φ, dann ist jedem Element a in $\mathfrak{M}$ eine Funktion zugeordnet, die wir mit $\varphi_a(x)$ bezeichnen. Danach definieren wir eine Funktion $\delta(x)$ durch die Festsetzung $\delta(x) = \varphi_x(x)$ und bilden weiter eine von δ total verschiedene Funktion $\psi(x)$. Dann kann $\psi(x)$ in F nicht vorkommen, denn wäre $\psi(x) = \varphi_a(x)$, so wäre $\psi(a) = \varphi_a(a) = \delta(a)$ gegen die Definition von ψ.

Dieses elegante Schlußverfahren, dessen praktische Bedeutung ungleich größer ist, als die des Verfahrens in § 23, bezeichnet man als das „Diagonalverfahren" oder den „Diagonalschluß." Lassen sich nämlich, wie dies bei abzählbaren Mengen der Fall ist, die Elemente von $\mathfrak{M}$ in eine Reihe bringen, so gilt das gleiche von den Funktionen in F, und man erhält eine quadratische Tabelle, in der $\delta(x)$ durch die Diagonale repräsentiert wird, wie es das folgende Schema andeutet:

.	φ_a	φ_b	φ_c	. . .
a	$\underline{\varphi_a(a)}$	$\varphi_b(a)$	$\varphi_c(a)$	. . .
b	$\varphi_a(b)$	$\underline{\varphi_b(b)}$	$\varphi_c(b)$	. .
c	$\varphi_a(c)$	$\varphi_b(c)$	$\underline{\varphi_c(c)}$	. .
⋮	⋮	⋮	⋮	

Zu beachten ist noch, daß bei unserer Definition von ψ diese

Funktion eine vollständige Funktion ist. Infolgedessen ist nicht nur die Menge Φ aller Funktionen in M überhaupt, sondern schon die Menge aller vollständigen Funktionen in M von größerer Mächtigkeit als M.

IX.

Nichtabzählbare Mengen.

§ 26. Jede rationale Zahl r zwischen 0 und 1 läßt sich auf eine und nur eine Weise in einen endlichen Kettenbruch mit ganzzahligen Nennern $a_1 a_2 \ldots . a_n$

$$r = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

entwickeln. Wir schreiben abkürzungsweise

$$r = [a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n].$$

Die Indices zeigen sogleich, daß r eine unvollständige Funktion in der Menge $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen definiert. Die Teilmenge M_1, zu der diese Funktion Elemente zuordnet, besteht aus den ganzen Zahlen unterhalb $n+1$.

Jede Irrationalzahl s zwischen 0 und 1 läßt sich in einen und nur einen unendlichen Kettenbruch von gleicher Form entwickeln, und jeder unendliche Kettenbruch mit ganzzahligen Nennern, (dessen Zähler alle gleich 1 sind), definiert eine und nur eine Irrationalzahl:

$$s = [a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_n, \ldots \ldots].$$

Hieraus geht sofort hervor, daß die vollständigen Funktionen in

𝔖 den Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 eindeutig zugeordnet sind und umgekehrt. **Also hat die Menge aller Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 größere Mächtigkeit als 𝔖, sie ist nicht abzählbar.**

§ 27. Da die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist, ist insbesondere diejenige ihrer Teilmengen abzählbar, welche aus allen algebraischen Irrationalzahlen zwischen 0 und 1 besteht. Es gibt also zwischen 0 und 1 Irrationalzahlen, die nicht algebraisch sind, und das Diagonalverfahren definiert faktisch solche Zahlen in beliebiger Anzahl.

Nicht-algebraische Zahlen heißen transzendent. Bekannt ist insbesondere die Transzendenz von e und π. Aber schon 1851 konstruierte Liouville transzendente Zahlen, um die Möglichkeit der Transzendenz nachzuweisen. Diese Zahlen sind, wie e und π, einfacher definiert, als die durch das Diagonalverfahren beschriebenen Transzendenten. Aber der Nachweis ihrer Transzendenz ist, was die Einfachheit der mathematischen Hülfsmittel betrifft, nicht entfernt mit dem Diagonalverfahren zu vergleichen. Dabei ist zu bedenken, daß unsere Darstellung infolge der absichtlichen Voranstellung allgemeiner Gesichtspunkte keineswegs diejenige Übersicht besitzt, die dem Diagonalverfahren durch ein ad hoc verfaßtes Referat gegeben werden könnte.

§ 28. Die Menge aller reellen Zahlen, der positiven, negativen, ganzen, gebrochenen und irrationalen, wird als das Kontinuum[1] bezeichnet. Da die Menge der Irrationalen zwischen 0 und

[1] Spezieller noch als das „Linearkontinuum."

1 eine Teilmenge des Kontinuums ist, folgt die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums selbst. Es ist von höherer Mächtigkeit als $\mathfrak{G}$.

Das Kontinuum enthält nicht-abzählbare Teilmengen, z. B. die in § 26 benutzte. Von allen diesen, soweit man sie bisher untersucht hat, hat sich nachweisen lassen, daß sie dem Kontinuum äquivalent sind. Georg Cantor hat daher bereits 1877 die Vermutung ausgesprochen, daß die Mächtigkeit des Kontinuums die nächstgrößere nach der von $\mathfrak{G}$ sei. Doch ist bis heute ein Beweis für diesen Satz oder sein Gegenteil nicht erbracht worden; dagegen haben mehrere Fehlversuche das Interesse der Mathematiker an dem schwierigen Gegenstand mehr und mehr belebt, so daß das Kontinuumproblem eine der „aktuellsten" Fragen geworden ist. Man kann es mit den bis hier entwickelten Hülfsmitteln so formulieren:

„Es soll entweder eine Teilmenge des Kontinuums angegeben werden, die von geringerer Mächtigkeit als das Kontinuum, von größerer als die abzählbare Menge ist, oder es soll bewiesen werden, daß es eine solche Teilmenge nicht gibt."

§ 29. Dem Kontinuum äquivalent ist offenbar die Menge aller Punkte einer Geraden. Dies führt auf die Frage nach der Mächtigkeit der Menge aller Punkte der Ebene, des dreidimensionalen oder auch eines n-dimensionalen Raumes. Man erhält das Resultat, daß alle diese Mengen, sogar die der Punkte eines Raumes von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. In analoger Weise läßt sich beweisen, daß die Menge aller stetigen Funktionen von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Überraschend sind diese Resultate aus dem gleichen Grunde wie die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen, weil offenbar

die Anordnung der Punkte eines Raumes durch die Zuordnung in das Kontinuum völlig zerstört wird, während umgekehrt die Menge der stetigen Funktionen eine Ordnung erhält, die ihr nach der ursprünglichen Definition nicht zukommt.

Läßt man die Beschränkung der Stetigkeit fallen und betrachtet die Menge aller Funktionen im gewöhnlichen Sinne des Wortes überhaupt, so ist diese keine andere, als die Menge aller zum Kontinuum gehörigen Funktionen, also nach § 25 von größerer Mächtigkeit, als das Kontinuum. —

Hiermit sind drei Mengen aufgewiesen, die schon lange vor Schöpfung der Mengenlehre Gegenstand mathematischer Arbeit waren: die Menge der ganzen Zahlen, der reellen Zahlen und der Funktionen. Sie sind nicht erst zu dem Zweck konstruiert, die Möglichkeit verschiedener Mächtigkeiten darzutun, vielmehr boten sie sogleich der Mengenlehre einen fruchtbaren Anknüpfungspunkt an vorhandene Arbeitsgebiete. Für den Zweck des vorliegenden Referates, das sich nicht an Fachmathematiker allein wendet, dürfte es genügen, die prinzipielle Möglichkeit verschiedener Mächtigkeiten und die Brauchbarkeit dieser Begriffsbildung an den einfachsten Beispielen dargetan zu haben.

Dritter Teil.

Ähnlichkeit, Abschnitt und Ordnungstypus.

X.

Geordnete Mengen.

§ 30. Es war bereits früher auf den sonderbaren Eindruck hingewiesen, den die Abzählbarkeit dichter Mengen, wie der der

Rationalzahlen, hervorruft. Er beruht darauf, daß die natürliche Ordnung der Rationalzahlen durch die Zuordnung zu den ganzen Zahlen zerstört wird. Indem wir nun in den weiteren Ausführungen die Ordnung berücksichtigen, gelangen wir zu einer neuen Art der Vergleichung, die enger ist als die Äquivalenz, zugleich aber nur noch geordnete Mengen in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht.

Wir nennen eine Menge geordnet, und zwar linear geordnet, wenn zwischen jedem Paar von einander verschiedener Elemente eine Beziehung besteht, die den Postulaten Ic bis IIIc genügt[1]. Wir wollen aber die Worte und Zeichen für diese Beziehung anders wählen, als bisher, um Verwechslungen mit der Ordnung der Mächtigkeiten zu verhindern. Für $<$ und $>$ setzen wir $\prec$ und $\succ$ und sprechen diese Zeichen durch die Worte „vor“ und „nach“ aus. Da wir nur linear geordnete Mengen betrachten, kann der Zusatz „linear“ wegbleiben. Er dient zur Unterscheidung von der planaren und räumlichen Ordnung, die wir bei den ebenen und räumlichen Punktmengen vorfinden.

Ein und dieselbe Menge kann natürlich verschieden geordnet werden; wir haben bereits drei Ordnungen der Menge der rationalen Zahlen kennen gelernt. Doch existiert bei allen speziellen Beispielen eine natürliche Ordnung der Menge, sofern überhaupt eine existiert. Dies nehmen wir im folgenden als Grundlage: Jede betrachtete Menge sei auf eine ganz bestimmte Art geordnet, und nur diese eine Art werde in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen. Insbesondere ist bei den Mengen von Zahlen stets die Ordnung nach der Größe als die natürliche anzusehen.

---

[1] Unserem Bestreben, die Ordnung auf Teilung und Vergleichung zurückzuführen, entspräche es, auch hier von Teilungs- und nicht von Ordnungspostulaten auszugehen. Doch würde dadurch die Entwicklung unnötig umständlich gestaltet. Wir werden sie aber im achtundzwanzigten Kapitel nochmals aufnehmen.

§ 31. Danach definieren wir folgendes Vergleichungsprinzip:

XIX. Zwei geordnete Mengen M und N heißen „ähnlich", $M \simeq N$, wenn eine umkehrbar eindeutige Beziehung φ von folgender Art existiert: Sind a, b zwei Elemente in M, p, q die ihnen entsprechenden in N, und ist $a \prec b$, so ist $p \prec q$.

Bei einer ähnlichen Zuordnung folgt also nicht nur $a = b$ aus $\varphi(a) = \varphi(b)$ und umgekehrt, sondern auch $a \prec b$ aus $\varphi(a) \prec \varphi(b)$ und umgekehrt. Die Ähnlichkeit genügt den Postulaten Ib bis IIIb, ist also eine Vergleichung. Sie ist ferner ein Spezialfall der mengentheoretischen Äquivalenz, also sind ähnliche Mengen äquivalent. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht gestattet: die äquivalenten Mengen der ganzen und der rationalen Zahlen z. B. sind nicht ähnlich.

Von zwei äquivalenten Mengen sagten wir, sie seien von gleicher Mächtigkeit. Von zwei ähnlichen Mengen sagen wir, sie besitzen gleichen Ordnungstypus. Insbesondere nennt man ω den Ordnungstypus der Menge der ganzen positiven Zahlen, $\bar{\omega}$ den Ordnungstypus der der ganzen negativen Zahlen. Für beide Typen ist charakteristisch, daß zwischen zwei Elementen a und b nur endlich viele Elemente stehen. Für ω ist weiterhin charakteristisch, daß er ein erstes Element enthält, nämlich 1. Ein „erstes Element" e ist eines, das zu jedem anderen, x, in der Beziehung $e \prec x$ steht. Umgekehrt steht ein „letztes" Element l zu jedem andern in der Beziehung $x \prec l$. Es kann in einer geordneten Menge nur ein erstes, ebenso nur ein letztes Element geben. Für $\bar{\omega}$ ist die Existenz eines letzten Elementes (-1) charakteristisch. ω und $\bar{\omega}$ sind also sicher nicht ähnlich. — Es gibt Mengen, die Teilmengen von beiden Typen enthalten; z. B. finden sich in der

Menge der rationalen Zahlen die Teilmengen 1, 2, 4, 8, ... 2^n ... und 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... $(\frac{1}{2})^n$ ....; die erste ist vom Typ ω, die zweite vom Typ $\bar{\omega}$.

§ 32. Wenn wir zur Ähnlichkeit eine Teilung hinzunehmen, die mit ihr zusammen dem Postulat IV genügt, so können wir wieder bis zur Disjunktion VIII und dem Problem der Trichotomie gelangen. Am nächsten liegt es, die Teilung in Teilmengen zu verwenden, da sie dem Postulat IV genügt und da jede Teilmenge einer geordneten Menge auf Grund desselben Ordnungsprinzips selbst eine geordnete Menge ist, also hinsichtlich der Ähnlichkeit verglichen werden kann. Doch verliert diese Methode jede Aussicht auf Erfolg, da die Trichotomie nicht hergestellt werden kann. Zwar ist das Problem der Trichotomie auch für die Vergleichung der Mächtigkeiten noch ungelöst, aber es ist im höchsten Grad wahrscheinlich, daß die Ordnung der Mächtigkeiten trichotom ist. Faktisch sind imkomparable Mächtigkeiten bisher nicht bekannt geworden. Dagegen können wir sofort zwei inkomparable Ordnungstypen angeben, nämlich ω und $\bar{\omega}$. Zwischen ihnen besteht die Beziehung (Δ); keiner ist einem Teil des andern ähnlich, weil jeder Teil von $\bar{\omega}$ ein letztes, jeder von ω ein erstes Element enthält. Also ist weder $\omega \prec \bar{\omega}$ noch $\omega \succ \bar{\omega}$, aber es ist auch nicht $\omega \simeq \bar{\omega}$.

Dieser Schwierigkeit kann nur auf zwei Wegen abgeholfen werden; entweder man legt eine andere Teilung zu Grunde, oder man schränkt die Ordnung der betrachteten Mengen weiter ein. Der erste Weg ist nicht betreten worden, es ist auch nicht zu erkennen, welche andere Teilung möglich sein soll. Denn eine Einschränkung auf besondere Teile, wie sie beim Winkelteilen mit Erfolg angewandt wird, ist hier aussichtslos, da ja ω überhaupt

keinen zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Teile enthält und umgekehrt. Wir werden daher innerhalb der geordneten Mengen noch eine besondere Klasse, die der „wohlgeordneten“ oder „eutaktischen“, herausheben. Zur Vergleichung der Ordnungstypen solcher Mengen ist dann noch eine besondere Art der Teilung von Bedeutung, die wir als „Abschneiden“ bezeichnen. Sie genügt wie wir sehen werden, dem Postulat vom Teil und Ganzen.

XI.

Wohlordnung.

§ 33. Wir nennen mit Georg Cantor eine geordnete Menge „wohlgeordnet“, wenn jede ihrer Teilmengen ein erstes Element besitzt. Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist die, daß auch jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge wohlgeordnet ist. Ferner besitzt auch die Menge selbst ein erstes Element. Denn in der Teilmenge aller Elemente, die einem Element a vorangehen, muß es ein erstes Element geben, von dem man sofort zeigt, daß es jedem Element der ganzen Menge vorangeht.

Die Definition der Wohlordnung ist eine der fruchtbarsten die die Mathematik überhaupt kennt. Aus diesem Grund mag von Beispielen wohlgeordneter Mengen zunächst nur ein einfachstes genannt werden, damit der rein logische Charakter der folgenden Schlüsse deutlich zum Ausdruck kommt. Dieses einfachste Beispiel ist die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen. Sie ist wohlgeordnet, weil es in jeder Menge ganzer Zahlen stets eine kleinste gibt. Eine Menge die nicht wohlgeordnet ist, ist die der rationalen Zahlen; denn sie enthält die Teilmenge

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots (\frac{1}{2})^n \ldots$, in der es ein niederstes Element nicht gibt.

Die Sätze über wohlgeordnete Mengen fließen, wenn man sie bis zum Ursprung zurück verfolgt, aus zwei typischen Anwendungen der Definition. Die erste besteht in folgendem Satz:

XX. Eine wohlgeordnete Menge kann nicht auf eine Teilmenge derart ähnlich abgebildet werden, daß einem ihrer Elemente ein vorangehendes entspricht.*

Der Satz nimmt an, daß jedem Element x einer wohlgeordneten Menge ein Element $\varphi(x)$ der Menge entspricht, und behauptet, daß $\varphi(x)$ nicht vor x stehen kann. In der Tat, gäbe es Elemente x, für die $\varphi(x) \prec x$ wäre, so gäbe es ein erstes, a, unter ihnen. Es wäre $\varphi(a) = b$ vor a. Da nun φ eine ähnliche Zuordnung ist, folgt aus $b \prec a$ auch $\varphi(b) \prec \varphi(a)$, d. h. $\varphi(b) \prec b$, im Widerspruch zu der Annahme, daß a das erste Element sei, für das $\varphi(a) \prec a$ sein soll.

Die zweite typische Anwendung besteht in folgendem Satz:

XXI. Es sei M eine wohlgeordnete Menge und S eine Menge, die nicht geordnet zu sein braucht. Zwischen S und M bestehe folgende Beziehung:

1) S enthält das erste Element von M.
2) Enthält S alle Elemente von M, die einem Element x von M vorangehen, so enthält S auch das Element x selbst.

Dann enthält S alle Elemente von M.

Unter allen Elementen von M, die nicht in S enthalten sind, müßte es nämlich ein erstes a geben. Dann enthielte aber S alle Elemente, die a in M vorangehen, mithin a selbst, gegen die

*Zermelo. (Siehe S. X)

Annahme. Daß a keine Elemente vorangehen, ist durch die erste Voraussetzung ausgeschlossen, wonach S das erste Element von M enthalten soll.

34. Der Satz XXI macht bereits von einer charakteristischen Teilmenge Gebrauch, die wir für jede geordnete Menge definieren können:

Abschnitt einer geordneten Menge M heißt jede eigentliche Teilmenge M' von folgender Eigenschaft: Ist a in M' und $b \prec a$, so ist auch b in M'.

Die Teilmenge aller Elemente, die einem gegebenen Element x vorangehen, ist ein Abschnitt; wir werden ihn künftig mit $A(x)$ bezeichnen und sagen, er sei von x erzeugt. Ein solcher, von einem Element erzeugter Abschnitt steht in folgender Beziehung zu dem erzeugenden Element:

1) Ist $a \prec x$, so ist a in $A(x)$ und umgekehrt.
2) Ist $b \succ a$ für alle Elemente a von $A(x)$, so ist b mit x identisch oder $b \succ x$ und umgekehrt.

Enthält $A(x)$ ein letztes Element p, so gibt es zwischen x und p kein Element; x ist das auf p unmittelbar folgende Element. Enthält $A(x)$ kein letztes Element, so nennt man x den Limes von $A(x)$, da die beiden Beziehungen 1), 2) gerade die charakteristischen Eigenschaften des arithmetischen Limesbegriffs enthalten. (Vgl. hierzu das erste Referat; Kap. IV, Begriff des Limes). Nur ist zunächst nicht gesagt, daß jeder Abschnitt einer geordneten Menge einen Limes haben muß. In der Menge aller rationalen Zahlen zum Beispiel bilden alle Zahlen unterhalb $\sqrt{2}$ einen Abschnitt ohne Limes. Dagegen im Kontinuum, der Menge aller Irrationalzahlen oder Dedekindschen Schnitte, besitzt jeder Abschnitt ohne letztes Element einen Limes. Das

Gleiche gilt von den wohlgeordneten Mengen, denn auf Grund der Definition der Wohlordnung muß es unter allen Elementen, die einem Abschnitt nicht angehören, ein erstes, x, geben[1]. Dieses wieder muß oberhalb aller Elemente des Abschnittes liegen, was sich unmittelbar aus der Definition des Abschnittes ergibt. — Das Kontinuum ist übrigens nicht wohlgeordnet, da es ja die Teilmenge 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... enthält, die kein erstes Element besitzt. Dies tritt noch deutlicher hervor durch die folgende Begriffsbildung:

Rest einer geordneten Menge M heißt jede Teilmenge M'' von folgender Eigenschaft: Ist x in M'' und $y \succ x$, so ist auch y in M''.

Die komplementäre Menge eines Restes ist ein Abschnitt und umgekehrt. Ist M' ein Abschnitt, M'' der komplementäre Rest, so wollen wir diese Beziehung durch das Zeichen

$$M = M' + M''$$

ausdrücken, womit zunächst ein Kalkul nicht eingeführt werden soll.

Besitzt ein Rest ein erstes Element x, so soll er mit $R(x)$ bezeichnet werden. Jedes von x verschiedene Element in $R(x)$ ist hinter x geordnet. Besitzt M ein erstes Element e, so ist $M = R(e)$. (In der Definition ist nicht verlangt, daß ein Rest eine eigentliche Teilmenge sein soll).

In einer wohlgeordneten Menge besitzt jeder Rest ein erstes Element, auf Grund der Definition der Wohlordnung. (Das trifft z. B. im Kontinuum nicht zu). Eine Folge davon ist, daß

[1] Der Abschnitt ist hier als eigentliche Teilmenge definiert. Läßt man den Zusatz eigentlich weg, so ist die wohlgeordnete Menge selbst einer ihrer Abschnitte und der einzige ohne Limes.

in einer wohlgeordneten Menge zu jedem Element x ein unmittelbar folgendes x' existiert, so daß zwischen x und x' kein Element der Menge liegt. Im Kontinuum und der Menge aller rationalen Zahlen dagegen liegt zwischen irgend zwei Elementen stets ein drittes, daher unendlich viele. Man sagt dafür, diese Mengen seien d i c h t. Eine wohlgeordnete Menge ist n i c h t d i c h t.

§ 35. Betrachten wir nun weiterhin ausschließlich wohlgeordnete Mengen, so ist jeder Abschnitt von einem Element erzeugt, das zugleich erstes Element des komplementären Restes ist. Dem ersten Element der Menge ordnen wir einen f i n g i e r t e n Abschnitt zu, der mit „n u l l", 0, bezeichnet wird, da er kein Element enthält Diese Fiktion erweist sich zweckmäßig zur Beseitigung kleiner Besonderheiten. Der zu 0 komplementäre Rest ist die Menge selbst.

Es sei T eine beliebige Teilmenge von M, die kein Abschnitt ist. Dann definieren wir die Menge $\mathsf{A}(T)$ durch folgende Festsetzung: Ist x ein Element von $\mathsf{A}(T)$, so ist entweder x in T selbst oder es giebt in T ein Element $y \succ x$.

$\mathsf{A}(T)$ besitzt die Eigenschaft: Ist x in $\mathsf{A}(T)$ und $z \prec x$, so ist auch z in $\mathsf{A}(T)$. Daher ist $\mathsf{A}(T)$ ein Abschnitt $A(t)$ von M oder mit M identisch, je nachdem es eigentliche oder uneigentliche Teilmenge von M ist. Ist $\mathsf{A}(T)$ ein Abschnitt, so besitzt es entweder ein letztes Element oder nicht. Im ersten Fall besitzt auch T dieses letzte Element und umgekehrt, natürlich wiederum als letztes, und t ist das unmittelbar folgende Element. Im zweiten Fall ist t der Limes von $\mathsf{A}(T)$ und steht zu T in der folgenden Beziehung:

(1) Ist $s \prec t$, so gibt es in T ein $x \succ s$ und umgekehrt.

(2) Ist $s \succeq t$, so ist $s \succ x$ für jedes x in T und umgekehrt.

Wir nennen daher t wieder den Limes von T selbst[1].

Aus der Definition des Limes geht hervor, daß nicht jedes Element einer wohlgeordneten Menge ein Limes sein kann[2], daß vielmehr die Limeselemente dadurch ausgezeichnet sind, daß sie kein unmittelbar vorangehendes Element besitzen. Doch soll gesagt werden, daß der Limes einer Teilmenge T auf alle Elemente von T unmittelbar folgt. —

XII.

Die trichotome Disjunktion.

§ 36. Die Abschnitte sowohl wie die Reste sind Klassen von Teilen, die jede für sich die Postulate der Teilung und das Postulat der äquivalenten Teile erfüllen. Es gelten nämlich die Sätze:

XXIIa. Der Abschnitt eines Abschnitts ist Abschnitt der Menge selbst. Der Rest eines Restes ist Rest der Menge selbst.

XXIIb. Sind $M \simeq N$ zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen, so gibt es zu jedem Abschnitt von M einen ähnlichen Abschnitt in N, $A(x) \simeq A(y)$, wenn nämlich y das zu x in M zugeordnete Element in N ist. Ebenso ist $R(x) \simeq R(y)$.

Die Disjunktion VIII läßt sich daher sofort für beide speziellen Teilungen im Verein mit der Ähnlichkeit als Vergleichung

[1] Analoge Betrachtungen findet man für das Kontinuum im ersten Referat, § 35, beim Beweise des Satzes, daß jede steigende Folge reeller Zahlen einen Limes besitzt. —

[2] Auch hierin ist eine wohlgeordnete Menge vom Kontinuum wesentlich verschieden. Im Kontinuum ist jedes Element Limes aller vorangehenden.

aufstellen; doch sind die Reste wieder unbrauchbar, weil die Disjunktion nicht trichotom wird. Enthält eine Menge ein letztes Element, so auch jeder ihrer Reste, und umgekehrt. Hat daher M ein letztes Element, N keines, so ist kein Rest von M zu N ähnlich und umgekehrt, und es ist auch M zu N nicht ähnlich.

Legen wir dagegen das Abschneiden als Teilung (und die Ähnlichkeit als Vergleichung) zu Grunde, so erweist sich sogleich das Postulat vom Teil und Ganzen erfüllt, das hier folgende Fassung annimmt:

XXIII. Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus XX. Wäre nämlich $M \simeq A(x)$, so entspräche dem Element x in M ein Element y in $A(x)$, es wäre infolgedessen $y \prec x$, was nach XX unmöglich ist.

§ 37. Mit diesem Satz sind sofort die Fragen 1, 2, 4 des Trichotomieproblems beantwortet und es bleibt zur Erledigung der dritten noch der Beweis des Satzes IX zu erbringen, der in der neuen Terminologie wie folgt lautet:

XXIV. Sind M und N zwei wohlgeordnete Mengen und keine einem Abschnitt der anderen ähnlich, so sind beide zueinander ähnlich.

Die Ähnlichkeit besteht in der Existenz einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung, welche die Ordnung erhält. Wir werden diese Zuordnung zwischen M und N aufzusuchen haben. Ist sie gefunden, so muß nach XXIIb zwischen entsprechenden Elementen x in M, y in N die Beziehung

$$(\varphi)\ A(x) \simeq A(y)$$

bestehen. Diese Beziehung nehmen wir jetzt umgekehrt als De-

finition der Zuordnung: wir nennen zwei Elemente x, y entsprechend, wenn ihre Abschnitte ähnlich sind. Wir haben alsdann dreierlei zu zeigen: 1) Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig. 2) Sie erhält die Ordnung. 3) Sie ordnet jedem x in M ein y in N zu und umgekehrt.

Wir schicken folgenden Hülfssatz voraus, der unmittelbar aus der Definition des Abschnittes folgt:

XXV. Von zwei Abschnitten derselben Menge ist einer ein Abschnitt des andern: Ist $x' \prec x$, so ist $A(x')$ Abschnitt von $A(x)$.

Nach XXIII folgt daraus sofort:

XXVI. Zwei verschiedene Abschnitte derselben Menge sind nicht ähnlich; d. h. aus $A(x) \simeq A(x')$ folgt $x = x'$.

Nunmehr folgt der Beweis von XXIV.

ad 1) Aus $A(x) \simeq A(y)$, $A(x) \simeq A(y')$ folgt $A(y) \simeq A(y')$ und nach XXVI $y = y'$. Analog aus $A(x) \simeq A(y) \simeq A(x')$: $x = x'$.

ad 2) Vorausgesetzt ist (α) $A(x) \simeq A(y)$. (β) $A(x') \simeq A(y')$. (γ) $x' \prec x$. Zu beweisen ist (δ) $y' \prec y$. Wir bedürfen zum Beweise nur der Voraussetzungen (α) und (γ). Denn aus $x' \prec x$ folgt, daß $A(x')$ ein Abschnitt von $A(x)$ ist, aus XXIIb nach (α), daß $A(y)$ einen Abschnitt $A(y') \simeq A(x')$ besitzt, aus XXIIa, daß $A(y')$ ein Abschnitt von N ist, endlich aus der Definition des Abschnittes, daß $y' \prec y$ ist.

ad 3) Sei S die Menge aller derjenigen Elemente x in M, denen durch (φ) ein Element y in N zugeordnet wird, so haben wir zu zeigen, daß jedes Element von M zu S gehört. Wir beweisen dies nach Satz XXI. S enthält sicher das erste Element von M, denn diesem ist das erste von N zugeordnet, da beider

Abschnitte null sind. Enthält ferner S einen Abschnitt $A(p)$ von M, so enthält es p selbst. Um dieses einzusehen, betrachten wir die Menge A' derjenigen Elemente y in N, die den Elementen x von $A(p)$ entsprechen.

Aus dem Beweise ad 2) folgt: Ist y in A', $y' \prec y$, so ist y' in A' und zwischen den entsprechenden Elementen x, x' besteht die Relation $x' \prec x$. Es ist also erstens $A(p) \simeq A'$ und zweitens A' ein Abschnitt, da es eine eigentliche Teilmenge von N ist. $A' = N$ ergäbe nämlich $N \simeq A(p)$ gegen die Voraussetzung des Satzes.

Da A' ein Abschnitt $A(q)$ von N und $A(p) \simeq A(q)$ ist, ist p in S, was zu beweisen war.

Nach XXI folgt, daß S alle Elemente von M enthält, d. h. (φ) ordnet jedem Element von M eines von N zu. Ebenso beweist man die Umkehrung.

Damit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht, und wir erkennen, daß die Disjunktion VIII trichotom wird: zwischen zwei wohlgeordneten Mengen M, N besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen:

$$M \prec N, \qquad M \simeq N, \qquad M \succ N$$

von denen $M \prec N$ ausgesprochen wird: „M ist niederer oder von niederem Typus als N“, und aussagt, daß N einen zu M ähnlichen Abschnitt besitzt.

38. Der Satz XXIII klärt die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Abschnitten dahin auf, daß jeder Abschnitt niederen Typus hat, als die Menge. Zu beliebigen Teilen steht eine wohlgeordnete Menge in etwas weiterer Beziehung:

XXVII. **Eine Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist nicht von höherem Ordnungstypus als die Menge.**

Wäre nämlich M' eine Teilmenge von M und $M' \succ M$, so wäre M einem Abschnitt $A'(x)$ von M' ähnlich, es entspräche daher dem Element x in M ein Element y in $A'(x)$, d. h. $y \prec x$, was nach XX unmöglich.

Daß aber eine Teilmenge von M den gleichen Typus mit M besitzen kann, beweisen die Reste des Typus ω.

Sind $A(x)$ und $A(x')$ zwei Abschnitte derselben Menge und $A(x') \prec A(x)$, so ist $A(x')$ einem Abschnitt $A(x'')$ von $A(x)$ ähnlich, nach XXVI aber, da $A(x'')$ Abschnitt von M ist, mit $A(x'')$ identisch; d. h. es ist x' in $A(x)$, oder $x' \prec x$:

XXVIII. **Aus $A(x') \prec A(x)$ folgt $x' \prec x$, wenn beide Abschnitte derselben Menge angehören, und umgekehrt.**

Da jedem Element umkehrbar eindeutig ein Abschnitt entspricht, folgt sofort weiter:

XXIX. **Die Menge aller Abschnitte von M ist zu M ähnlich.**

Sind $R(x)$, $R(x')$ zwei Reste einer Menge und $x \prec x'$, so ist $R(x')$ Rest von $R(x)$, und umgekehrt. Nach XXVII folgt daraus: $R(x')$ ist nicht von höherem Typus als $R(x)$. Ist daher umgekehrt $R(x') \succ R(x)$, so ist sicher $x' \prec x$. Die Menge aller Reste von M wird später untersucht werden. Man sieht aber hier bereits, daß die Ordnung der Reste nach ihrem Typus eine völlig andere ist, als die Ordnung nach den erzeugenden Elementen. Insbesondere kann aus $R(x) \simeq R(x')$ nicht wie bei den Abschnitten auf die Identität $x = x'$ geschlossen werden, wie der Typus ω beweist.

XIII.

Die transfiniten Zahlen.

§ 39. Ähnliche Mengen sind äquivalent. Jeder Ordnungstypus hat daher eine ganz bestimmte Mächtigkeit, da zwei Mengen, welche den gleichen Ordnungstyp besitzen, von gleicher Mächtigkeit sind.

Für endliche Mengen liegt der Fall besonders einfach. Jeder Ordnungstypus definiert zugleich eine Mächtigkeit, die ihn rückwärts eindeutig bestimmt: Jede endliche Menge kann nur auf eine Art wohlgeordnet weren. In der Tat bezeichnen wir mit dem Zeichen 7 sowohl die Mächtigkeit einer Menge von sieben Elementen wie auch den einzigen möglichen einfach geordneten Typus einer solchen Menge. Georg Cantor unterscheidet diese doppelte Bedeutung als Kardinalzahl und Ordinalzahl. Die Verwendung von Indices: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_7$ bringt den Charakter der Ordinalzahl rein zum Ausdruck. Sagen wir dagegen, eine gewisse Fläche habe sieben Quadratmeter Inhalt, so fungiert sieben als reine Kardinalzahl.

Für unendliche Mengen liegt der Fall wesentlich anders. Zwei verschiedene Ordnungstypen können von gleicher Mächtigkeit sein. Z. B. werden wir sehen, daß die Menge aller wohlgeordneten Typen von gleicher Mächtigkeit selbst eine höhere Mächtigkeit besitzt, als die Typen selbst; insbesondere ist die Menge aller wohlgeordneten abzählbaren Typen nicht abzählbar. Es fallen also, wenn man Mächtigkeiten und Ordnungstypen allgemein als Zahlen bezeichnet, im transfiniten die Begriffe der Kardinal- und Ordinalzahl auseinander.

Es hat sich nun der Gebrauch eingebürgert, die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen als transfinite Zahlen

oder Ordnungszahlen zu bezeichnen. Und hierbei fällt auch der Zusatz „transfinit" fort, sowie er sich von selbst versteht. Dagegen wird das Wort „Kardinalzahl" noch wenig gebraucht, und dies aus folgendem Grunde: Die Bezeichnung „Mächtigkeit" ist hinreichend bequem und keines Ersatzes bedürftig. Anderseits wird man die Bezeichnung „Zahl" nicht gerne anwenden, so lange die Möglichkeit der Inkomparabilität nicht ausgeschlossen erscheint. Es würde zu scharf gegen den Sprachgebrauch verstoßen, von inkomparabeln Zahlen zu reden.

Es bilden nun die Mächtigkeiten der wohlgeordneten Mengen eine Klasse von überaus einfachen Eigenschaften; insbesondere sind alle komparabel. Ja, es läßt sich sogar unter gewissen einfachen Annahmen beweisen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, daß also jede Mächtigkeit auch die einer wohlgeordneten Menge ist. Doch ist dieser Nachweis erst in jüngster Zeit in einer ernst zu nehmenden Art und Weise erbracht[1] worden und hat die Terminologie noch nicht beeinflußt. Solange man mit der Möglichkeit rechnen mußte, daß die wohlgeordneten Mächtigkeiten eine besondere Klasse bilden, durfte man sie nicht Kardinalzahlen nennen; die Bezeichnung „wohlgeordnete Mächtigkeit" ist philologisch nicht einwandfrei, eine einwandfreie wäre noch schwerfälliger als diese. Man nennt daher mit Georg Cantor die Mächtigkeit einer transfiniten wohlgeordneten Menge ein „Alef"; dies ist der Name des ersten Buchstaben $\aleph$ des hebräischen Alphabets. Die Menge aller Alefs, die kleiner sind, als ein gegebenes, ist, wie wir sehen werden, wohlgeordnet. Ihre Ordnungszahl α nennt man den Index des gegebenen Alef und bezeichnet dieses danach mit $\aleph_\alpha$. Die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$, die des Typus ω, ist die kleinste trans-

[1] Vergl. Kap. XXX.

finite Mächtigkeit, es gehen ihr daher keine Alefs voran, und sie ist demnach mit $\aleph_0$ zu bezeichnen. —

§ 40. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Ordnungszahlen und werden dabei unsere Sätze stets so formulieren, daß wir nicht von der Menge aller Ordnungszahlen sprechen. Diese Menge enthält nämlich, wie wir später sehen werden, einen unaufgeklärten Widerspruch.

Eine Ordnungszahl μ ist als gegeben anzusehen, wenn eine Menge M bekannt ist, der sie zukommt. Die Aussage, daß eine Menge N nach der Zahl μ oder dem Typus μ wohlgeordnet sei, behauptet dann nichts anderes, als daß N zu M ähnlich ist. Jeder Abschnitt von M repräsentiert eine Ordnungszahl, die niederer als μ ist, und umgekehrt ist jeder Zahl $\nu \prec \mu$ ein Abschnitt in M eindeutig zugeordnet. Da weiter die Menge aller Abschnitte von M zur Menge M selbst ähnlich ist, sofern 0 mitgerechnet wird, ist die Menge aller Abschnitte von M nach dem Typus μ wohlgeordnet; das heißt aber:

XXX. Die Menge aller Ordnungszahlen, die μ vorangehen, einschließlich der Null, ist nach dem Typus μ selbst wohlgeordnet.

Z. B. hat die Menge der Zahlen unter 7:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

den Ordnungstypus 7, die Menge aller Zahlen $n \prec \omega$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

den Typus ω, und die Menge aller Zahlen unter ω mit ω zusammen bildet den Typus

$$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots \omega.$$

der mit $\omega + 1$ bezeichnet wird.

Die Menge aller Ordnungszahlen, welche einer Zahl α vorangehen, ist in jeder Menge von Ordnungszahlen, in der sie als echter Teil enthalten ist, ein Abschnitt, und zwar, wenn auch α vorhanden ist, der zu α gehörige Abschnitt. Wir nennen sie daher künftig einfach $A(\alpha)$.

Nunmehr beweisen wir folgende Sätze:

XXXI. In jeder Menge M von Ordnungszahlen gibt es eine erste Zahl.

XXXII. Jede Menge von Ordnungszahlen ist wohlgeordnet.

XXXIII. Zu jeder Menge M von Ordnungszahlen gibt es eine unmittelbar folgende, nicht in ihr enthaltene Zahl μ.

Der zweite Satz ist eine direkte Folge des ersten. Es sei α eine Zahl in M und M' die Teilmenge aller Zahlen von $A(\alpha)$, die zu M gehören. Enthält M' keine Elemente, so heißt das nichts anderes, als daß α erste Zahl in M ist. Gibt es aber Elemente in M', so gibt es unter ihnen ein erstes, β, weil M' Teilmenge von $A(\alpha)$ und $A(\alpha)$ wohlgeordnet ist. Man übersieht ohne weiteres, daß β erstes Element in M ist.

Um XXXIII zu beweisen, bilden wir zunächst eine Menge, welche den Typus μ besitzt. Sie heiße $\mathsf{A}(M)$, und als Element von $\mathsf{A}(M)$ gelte jede Zahl α, die in M selbst enthalten ist, oder zu der es in M eine größere Zahl λ gibt. $\mathsf{A}(M)$ ist mit M identisch, wenn M mit α auch $A(\alpha)$ enthält; denn $\mathsf{A}(M)$ enthält mit jedem seiner Elemente auch alle vorangehenden. Ist daher $A'(\lambda)$ ein Abschnitt in $\mathsf{A}(M)$, so ist $A'(\lambda) = A(\lambda)$ und λ der Ordnungstypus von $A'(\lambda)$.

Nennen wir jetzt μ den Ordnungstypus von $\mathsf{A}(M)$, so ist μ sicher größer als alle Zahlen von $\mathsf{A}(M)$ und damit von M, weil ja jede dieser Zahlen Typus eines Abschnittes von $\mathsf{A}(M)$ ist; und

umgekehrt: ist $\lambda \prec \mu$, so ist λ in $\mathsf{A}(M)$ enthalten, denn es gibt zu λ einen ähnlichen Abschnitt $A(\nu)$ in $\mathsf{A}(M)$; wir sahen aber, daß ν dessen Typus selbst, also $\nu = \lambda$ ist. Da es nun zu jeder Zahl λ in $\mathsf{A}(M)$ eine Zahl $\alpha \geqq \lambda$ in M gibt, haben wir damit konstatiert, daß μ auf alle Elemente von M (und übrigens auch $\mathsf{A}(M)$), unmittelbar folgt, w. z. b. w.

Wir können auch hier wie in § 35 zwei Fälle unterscheiden: Besitzt M kein letztes Element, so besitzt μ kein unmittelbar vorangehendes Element und heißt eine „Limeszahl". Besitzt dagegen M (und mit M auch $\mathsf{A}(M)$) ein letztes Element λ, so folgt μ unmittelbar auf λ selbst. Die Menge $\mathsf{A}(M)$ besteht aus den Zahlen in $A(\lambda)$ und aus λ selbst. Da $A(\lambda)$ den Typus λ hat, entsteht der Typus μ von $\mathsf{A}(M)$ aus dem Typus λ durch Hintanfügen eines Elementes; dementsprechend wird μ mit $\lambda + 1$ bezeichnet.

§ 41. Wir betrachten jetzt die Mächtigkeiten wohlgeordneter Mengen, wobei wir es wiederum vermeiden, von der Menge aller dieser Mächtigkeiten zu sprechen.

Sind M und N zwei wohlgeordnete Mengen, so sind sie entweder ähnlich, also auch äquivalent, oder eine ist einem Abschnitt, d. i. einer Teilmenge der andern ähnlich, somit äquivalent: Die Beziehung (Δ) der Disjunktion VIII ist also zwischen wohlgeordneten Mengen ausgeschlossen, alle Alefs sind komparabel.

Da ähnliche Mengen a fortiori gleichmächtig sind, bestimmt jeder Ordnungstypus eine Mächtigkeit, insbesondere jede Ordnungszahl ein Alef. Dabei gelten offenbar folgende Beziehungen:

XXXIV. Ist $\alpha = \beta$, so ist $\alpha \sim \beta$.

XXXV. Ist $\alpha < \beta$, so ist auch $\alpha \prec \beta$, d. h. ist α von geringerer Mächtigkeit als β, so ist auch α niederer als β.

Diese Beziehungen sind nicht umkehrbar. Ist $\alpha \sim \beta$, so kann α gleich, höher oder niederer als β sein, es läßt sich also gar nichts aussagen. Ist dagegen $\alpha \prec \beta$, so ist wenigstens gewiß, daß α nicht von höherer Mächtigkeit als β sein kann. Man kann diese Verhältnisse durch folgende „Verträglichkeitstabelle" darstellen:

	$\alpha \prec \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha \succ \beta$
$\alpha < \beta$	möglich	unmöglich	unmöglich
$\alpha \sim \beta$	möglich	möglich	möglich
$\alpha > \beta$	unmöglich	unmöglich	möglich

Unter allen Ordnungszahlen, welche eine gegebene Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzen, gibt es nach XXXI eine niederste. Wir bezeichnen sie mit Ω_α und nennen sie „die zu $\aleph_\alpha$ gehörige Anfangszahl". Insbesondere ist $\Omega_0 = \omega$ die zu $\aleph_0$ gehörige Anfangszahl.

§ 42. Die Zuordnung zwischen Alef und Anfangszahl ist umkehrbar eindeutig, und es ist daher $\Omega_\alpha \prec \Omega_\beta$, wenn $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ ist. Damit folgt sofort aus XXXI und XXXII:

XXXVI. In jeder Menge von Alefs ist eines das kleinste.

XXXVII. Jede Menge von Alefs ist wohlgeordnet.

Denn zu jeder Menge Alefs ist die Menge der zugehörigen Anfangszahlen ähnlich, und diese ist wohlgeordnet.

Es läßt sich aber auch der Satz XXXIII auf die Mächtigkeiten übertragen. Es sei M eine Menge von Alefs, so betrachten wir die Menge M aller Ordnungszahlen, deren Mächtigkeit entweder in M vorkommt oder kleiner ist als eine der Mächtigkeiten in M.

Die Mächtigkeit von M bezeichnen wir mit $\aleph_\mu$, die Ordnungszahl mit Ω_μ da wir sogleich sehen werden, daß sie die zu $\aleph_\mu$ gehörige Anfangszahl ist. Wir wissen aus den Betrachtungen des vorangehenden Paragraphen, daß Ω_μ auf alle Zahlen, die zu M gehören, unmittelbar folgt. Ω_μ ist daher von höherer Mächtigkeit, als alle Zahlen in M; denn ist λ in M, so ist die Mächtigkeit von λ in M oder niederer als eine in M. Das gleiche gilt von jeder mit λ gleichmächtigen Zahl, so daß Ω_μ mit λ nicht gleichmächtig sein kann. Daher ist $\aleph_\mu$ größer als jedes Alef in M.

Ist andererseits $\aleph_\alpha < \aleph_\mu$, so ist jede Zahl λ von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ niederer als Ω_μ, daher in in M enthalten, woraus wieder folgt, daß $\aleph_\alpha$ kleiner oder gleich einer Mächtigkeit in M ist. Damit ist unsere Behauptung erwiesen:

XXXVIII. Zu jeder Menge M von Alefs gibt es eine nicht in ihr enthaltene Mächtigkeit $\aleph_\mu$, die auf alle Alefs in M unmittelbar folgt.

Daß, wie behauptet, Ω_μ eine Anfangszahl ist, ergibt sich nun sofort: Gäbe es eine Zahl λ unter Ω_μ, die mit Ω_μ gleichmächtig wäre, so gehörte sie noch zu M, ihre Mächtigkeit $\aleph_\mu$ oder eine höhere daher zu M, gegen das soeben bewiesene.

Enthält M eine letzte Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, so ist $\aleph_\mu$ die unmittelbar auf $\aleph_\alpha$ folgende und wird konsequenterweise mit $\aleph_{\alpha+1}$ zu bezeichnen sein. Ist dagegen M ohne höchstes Element, so ist μ eine Limeszahl und $\aleph_\mu$ eine Limes-Mächtigkeit.

So ist zunächst $\aleph_0$ der Limes aller endlichen Mächtigkeiten; $\aleph_1$ ist die Mächtigkeit der Menge aller endlichen und abzählbaren Ordnungszahlen; die Ordnungszahl dieser Menge ist zugleich Ω_1. Nimmt man zu dieser Menge die sämtlichen Ordnungszahlen der Mächtigkeit $\aleph_1$ hinzu, so erhält man den Typus Ω_2 und die Mächtigkeit $\aleph_2$. Denkt man sich alle Mächtigkeiten $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_n, \ldots$

mit endlichem Index definiert, so bilden die Ordnungszahlen aller dieser Mächtigkeiten eine Menge vom Typus Ω_ω und der Mächtigkeit $\aleph_\omega$, auf die dann wieder $\aleph_{\omega+1}$ etc. folgt. — Die Gesamtheit aller gleichmächtigen Ordnungszahlen wird als eine „Zahlklasse" bezeichnet. Abweichend davon faßt man alle endlichen Zahlen zur ersten Zahlklasse zusammen, von da an konsequent die abzählbaren Zahlen zur zweiten, die Zahlen der Mächtigkeit $\aleph_1$ zur dritten Klasse etc.

Die Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse besitzt insbesondere diejenige Eigenschaft, die nach Cantors Vermutung der Mächtigkeit des Kontinuums zukommt:

XXXIX. Eine Menge von Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit $\aleph_1$ der zweiten Zahlklasse selbst.

Hierdurch tritt zu dem Kontinuumproblem die weitere Frage hinzu, ob die Mächtigkeit des Kontinuums ein Alef, insbesondere vielleicht $\aleph_1$ ist. Wir kommen auf diese Frage später zurück.

XIV.

Die Limeszahlen.

§ 43. Ist M eine Menge von Ordnungszahlen, μ die auf M unmittelbar folgende Zahl, so sei A die Menge aller Mächtigkeiten, die zu den Zahlen von M gehören, $\aleph_\alpha$ die auf A unmittelbar folgende Mächtigkeit. Es erhebt sich die Frage, ob und wann $\aleph_\alpha$ die Mächtigkeit von μ ist.

Gibt es in M eine höchste Zahl λ, so ist ihre Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ die höchste Mächtigkeit in A. Es ist daher $\mu = \lambda + 1$, $\aleph_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$. Da nun das Hinzufügen eines Elementes zu einer transfiniten Menge deren Mächtigkeit nicht ändert (§ 23), ist μ mit λ

gleichmächtig; d. h. μ besitzt nicht die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, sondern die vorangehende $\aleph_\gamma$.

Wir betrachten demgemäß den Fall, daß es in M keine höchste Zahl gibt. Dann kann es gleichwohl eine höchste Mächtigkeit in A geben. Diesen Fall untersuchen wir zuletzt und nehmen zunächst an, es gebe weder in M noch in A ein letztes Element. Es gibt also zu jeder Zahl in M nicht nur eine höhere schlechthin, sondern auch eine von höherer Mächtigkeit. Danach muß μ von höherer Mächtigkeit sein, als irgend eine Zahl in M; denn wäre λ in M und $\mu \sim \lambda$, so gäbe es $\nu > \lambda$ in M, daher wäre $\nu > \mu$ und daher auch $\nu \succ \mu$ gegen die Definition von μ.

Da die Mächtigkeit von μ in A nicht vorkommt, ist μ mindestens von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$. Da aber kein Typus dieser Mächtigkeit zu M gehören kann, ist μ nicht nur genau von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, sondern es ist auch niederste Zahl dieser Mächtigkeit, d. h. es ist $\mu = \Omega_\alpha$.

Nach Erledigung dieser beiden einfachen Fälle betrachten wir eine Menge M von Zahlen ohne letztes Element, aber mit höchster Mächtigkeit $\aleph_\gamma$. Zunächst beachten wir wieder, daß die Limeszahl μ dieser Menge höchstens gleich $\Omega_{\gamma+1}$ ist, denn diese Zahl ist sicher höher als alle Zahlen in M. Zugleich ist $\Omega_{\gamma+1}$ der Limes aller vorangehenden Zahlen, d. h. Limes der Menge $A(\Omega_{\gamma+1})$. Diese Menge hat den Typus $\Omega_{\gamma+1}$; jede andere Menge, die $\Omega_{\gamma+1}$ zum Limes hat, ist eine Teilmenge von $A(\Omega_{\gamma+1})$; wir schließen daraus, daß M selbst nicht von höherem Typus sein kann, als $\Omega_{\gamma+1}$, und erhalten daraus zwei Unterfälle: Entweder ist M vom Typus $\Omega_{\gamma+1}$, also von der Mächtigkeit $\aleph_{\gamma+1}$, oder von geringerer Mächtigkeit.

Der erste Fall erledigt sich wieder sofort. Ist μ von geringerer Mächtigkeit als $\aleph_{\gamma+1}$, so auch $A(\mu)$ und als Teilmenge von

$A(\mu)$ a fortiori M. Ist daher umgekehrt M von der Mächtigkeit $\aleph_{\gamma+1}$, so ist $\mu = \Omega_{\gamma+1}$.

Der letzte noch mögliche Fall, daß M nicht von höherer Mächtigkeit als $\aleph_\gamma$ ist, kann hier nicht erledigt werden. Er ist aber der wichtigste und von besonderer Bedeutung für die Erzeugungsprinzipien, Kap. XXVI. Wir werden daher im folgenden Kapitel, nachdem der mengentheoretische Kalkul entwickelt ist, den fehlenden Beweis dafür nachholen, daß in diesem vierten Fall der Limes von gleicher Mächtigkeit mit den höchsten Elementen der Menge M ist. In § 44 mag eine kurze Analysis eingefügt werden, die uns zeigen soll, auf welche Frage der Beweis sich konzentriert. Zuvor stellen wir die Resultate zusammen:

XL. Es sei M eine Menge von Ordnungszahlen, μ das unmittelbar folgende Element, $\aleph_\beta$ seine Mächtigkeit, $\aleph_m$ die Mächtigkeit von M.

1. Gibt es in M ein letztes Element λ, so ist $\mu = \lambda+1$ und $\aleph_\beta$ die Mächtigkeit von λ.

2. Gibt es in M weder ein letztes Element, noch eine höchste Mächtigkeit, so ist $\aleph_\beta$ Limes aller Mächtigkeiten in M und $\mu = \Omega_\beta$.

3. Gibt es in M kein letztes Element, aber eine höchste Mächtigkeit $\aleph_\gamma$, und ist $\aleph_m > \aleph_\gamma$, so ist $\aleph_m = \aleph_\beta = \aleph_{\gamma+1}$, $\mu = \Omega_\beta$ und zugleich M vom Typus μ.

4. (Unbewiesen) Gibt es in M kein letztes Element, aber eine höchste Mächtigkeit $\aleph_\gamma$, und ist $\aleph_m \leqq \aleph_\gamma$, so ist $\aleph_\beta = \aleph_\gamma$.

§ 44. Wir hatten gezeigt, daß μ der Ordnungstypus von $\mathsf{A}(M)$ ist. Wäre $\mathsf{A}(M) = M$, so bedarf es keines ausgeführten Beweises für Satz 4. Schwierigkeiten entstehen erst, wenn $\mathsf{A}(M)$

mehr Elemente enthält wie M. Es sei λ ein Element in $\mathsf{A}(M)$, welches nicht zu M gehört. Dann gibt es in M höhere Zahlen als λ und unter diesen eine erste, die wir $\varphi(\lambda)$ nennen. Wir setzen für die Zahlen ν in M selbst noch $\varphi(\nu) = \nu$.

Die Zahl $\varphi(\lambda)$ ist durch λ eindeutig bestimmt, aber es gilt nicht notwendig das umgekehrte. Alle Zahlen, für die $\varphi(\lambda)$ dieselbe Zahl ν von M bedeutet, fassen wir zu einer Menge $\Phi(\nu)$ zusammen. Jede Zahl λ von $\mathsf{A}(M)$ gehört in eine und nur eine der Mengen $\Phi(\nu)$. Diese bilden daher ein komplementäres Teilsystem von $\mathsf{A}(M)$, und dieses System ist ähnlich zu M. Die Elemente von M zerlegen $\mathsf{A}(M)$ in dieses Teilsystem.

Die Menge $\Phi(\nu)$ ist Teilmenge von $A(\nu+1)$, denn sie besteht nur aus ν und Elementen $\lambda \prec \nu$. $A(\nu+1)$ hat gleiche Mächtigkeit mit $\nu+1$, also sicher nicht höhere als $\aleph_\gamma$ nach den Voraussetzungen des Falles (4). Somit ist auch die Mächtigkeit von $\Phi(\nu)$ nicht höher als $\aleph_\gamma$.

Der Beweis unserer Behauptung spitzt sich daher auf folgende Frage zu: Gegeben sei eine Menge M' von Mengen Φ; weder die Mächtigkeit von M' noch die einer der Mengen Φ übersteigt $\aleph_\gamma$; kann dann die Mächtigkeit der durch Zusammenfassung aller Mengen Φ entstehenden Menge A höher als $\aleph_\gamma$ sein? Diese Frage muß verneint werden, wenn unsere Behauptung richtig sein soll. Man kann die Antwort auch so formulieren: Ersetzt man in einer Menge M, deren Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteigt, jedes Element ν durch eine Menge $\Phi(\nu)$, deren Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteigt, so ist auch die resultierende Menge nicht von höherer Mächtigkeit. Dieser Prozeß des Einsetzens wird uns im nächsten Kapitel näher beschäftigen. Er ist die Grundoperation, auf der sich der mengentheoretische Kalkul aufbaut. Daß die Behauptung für $\gamma = 0$ zutrifft, behauptet der früher bewiesene Satz, daß eine abzählbare

Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist (§ 19). Um eine Verallgemeinerung der Abzählung des Punktegitters wird es sich daher handeln, wenn wir zum Beweise der aufgestellten allgemeinen Behauptung gelangen wollen.

§ 45. Die Menge $\mathsf{A}(M)$ ist der kleinste Abschnitt, von dem M noch ein Teil ist. Wir wollen umgekehrt M einen „Kern" des Abschnittes $\mathsf{A}(M)$ nennen. Besitzt M ein letztes Element m, so ist auch dieses Kern von $\mathsf{A}(M)$, da jede Zahl unter m zu $\mathsf{A}(M)$ gehört und andererseits jede Zahl von $\mathsf{A}(M)$ unter m liegt, von m selbst abgesehen. Besitzt M kein letztes Element, so sei μ sein Limes, also $\mathsf{A}(M) = A(\mu)$. Wir wollen dann M auch als „Kern von μ" bezeichnen. Der Ordnungstypus eines Kerns einer Limeszahl μ ist sicher selbst eine Limeszahl, da der Kern kein letztes Element besitzt. Man sieht daraus leicht, daß man aus dem Kern M einer Limeszahl μ irgend eine Teilmenge weglassen darf, die nicht einen Rest von M in sich enthält. Es gibt daher in dem Sinne keinen kleinsten Kern von μ, daß nicht noch ein Teil von ihm selbst Kern von μ wäre. Dagegen gibt es unter den Ordnungstypen der Kerne von μ einen kleinsten; denn unter ω gibt es gewiß keinen mehr.

Man pflegt zu beweisen, daß jede Limeszahl von der Mächtigkeit $\aleph_0$ einen Kern vom Typus ω besitzt. Wir können aber leicht allgemein zeigen, daß der niederste Typus eines Kerns einer Limeszahl stets eine Anfangszahl ist. Da kein Kern von μ höhere Mächtigkeit als μ haben kann, — denn der größte Kern $A(\mu)$ hat den Typus μ, — folgt daraus sofort der spezielle Satz über die abzählbare Mächtigkeit, da für diese nur die eine Anfangszahl ω überhaupt in Betracht kommt. Rechnet man übrigens die Eins mit zu den Anfangszahlen, so hat man auch den Fall mit einzu-

schließen, daß μ keine Limeszahl ist. Dann ist $\mu = \nu + 1$ und ν ein Kern von μ, der aus einer Zahl besteht. Diesen Trivialfall schalten wir sogleich wieder aus.

Es sei also M ein Kern einer Limeszahl μ, $\aleph_\alpha$ seine Mächtigkeit und M von höherem Typus als Ω_α. Wir zeigen, daß es einen Kern von niederem Typus als M gibt. Daß M und Ω_α die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ besitzen, besagt, daß die Zahlen in M den Zahlen vor Ω_α umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. Es sei also λ in M und $\varphi(\lambda)$ die zu λ zugeordnete Zahl unterhalb Ω_α. Die Zuordnung kann nicht ähnlich sein, denn M ist von höherem Typus als Ω_α nach Voraussetzung. Es gibt daher in M gewiß zwei Zahlen $\lambda_1 \prec \lambda_2$, für die $\varphi(\lambda_1) \succ \varphi(\lambda_2)$ ist, und wir können die Existenz einer Teilmenge M'' von M behaupten, die folgende Eigenschaft besitzt:

a) Ist λ in M'', so gibt es in M ein Element $\varrho \succ \lambda$, für das $\varphi(\varrho) \prec \varphi(\lambda)$ ist.

Die komplementäre Teilmenge M' besitzt daher die Definition:

b) Ist σ in M', so gibt es unter den Elementen $\varrho \succ \sigma$ in M kein Element, für das $\varphi(\varrho) \prec \varphi(\sigma)$ wäre; d. h. aus $\varrho \succ \sigma$ folgt $\varphi(\varrho) \succ \varphi(\sigma)$ und demnach aus $\varphi(\tau) \prec \varphi(\sigma)$ umgekehrt $\tau \prec \sigma$, wenn nur σ in M' ist.

Auch diese Menge M' existiert gewiß, denn ist $\varkappa$ in M und $\varphi(\varkappa) = 0$, so gibt es überhaupt kein Element ϱ, für das $\varphi(\varrho) \prec \varphi(\varkappa)$ sein kann.

Nunmehr zeigen wir, daß die auf M' unmittelbar folgende Zahl μ' mit μ übereinstimmen muß. Wäre sie nämlich kleiner, so gäbe es in M Zahlen $\varrho \succeq \mu'$, und diese würden den Rest $R(\mu')$ von M bilden. Den Elementen dieses Restes entsprächen Elemente $\varphi(\varrho)$ von $A(\Omega_\alpha)$, und unter diesen gäbe es ein erstes, $\varphi(\lambda)$, d. h. für jedes Element ϱ in $R(\mu')$ wäre $\varphi(\varrho) \succeq \varphi(\lambda)$.

Da nun alle Zahlen von M' vor μ' liegen, wäre $R(\mu')$ ein Teil von M'', d. h. es gäbe nach (a) zu λ eine Zahl $\varrho \succ \lambda$, für die $\varphi(\varrho) \prec \varphi(\lambda)$ wäre. Da $\varrho \succ \lambda$, gehört ϱ zu $R(\mu')$, es müßte dann aber nach der Definition von λ $\varphi(\varrho) \succ \varphi(\lambda)$ sein, im Widerspruch mit dem zuletzt gesagten. Demnach kann μ' nicht vor μ liegen. Da $\mu' \succ \mu$ von vornherein ausgeschlossen ist, ist $\mu' = \mu$, d. h. M' ein Kern von μ.

Daß aber M' von niederem Typus als M ist, folgt aus (b). Denn da aus $\varphi(\tau) \prec \varphi(\sigma)$ auch $\tau \prec \sigma$ folgt, ist die Abbildung von M' auf die zugehörige Teilmenge von $A(\Omega_\alpha)$ ähnlich. Nach Satz XXVII ist daher

$$M' \leqq \Omega_\alpha$$

und da $\Omega_\alpha \prec M$ nach Voraussetzung, ist $M' \prec M$, w. z. b. w. Zu jedem Kern von μ, der keine Anfangszahl als Typus besitzt, gibt es also einen anderen Kern von niederem Typus, d. h.

XLI. Unter allen Kernen einer Limeszahl haben die von niederstem Ordnungstypus den Typus einer Anfangszahl.

Vierter Teil.

Der mengentheoretische Kalkul.

XV.

Kalkul mit Mächtigkeiten.

§ 46. Bei den Betrachtungen dieses Kapitels wird von der Wohlordnung kein Gebrauch gemacht, sie gelten also auch für

ungeordnete Mengen. Es handelt sich hierbei um die Bildung neuer Mengen aus einer Reihe von gegebenen Mengen. Die gegebenen Mengen bilden selbst eine Menge, die zwei, drei, endlich oder unendlich viele Elemente besitzen kann. Handelt es sich um zwei oder drei Elemente, so kann man jedem Element einen besonderen Buchstaben, M, N, P, beilegen. Wird über die Anzahl nichts weiter als die Endlichkeit vorausgesetzt, so zieht man die Bezeichnung durch einen Buchstaben und Indices vor: M_1, M_2, ... M_n. Diese Indices sind Elemente einer abzählbaren Menge $\mathfrak{G}$, gestatten daher auch die Bezeichnung einer abzählbaren Menge von Mengen M_1, M_2, M_n, ... in inf. — Allgemein kann man sich ebenso die Elemente irgend einer Menge durch ein einziges Zeichen und angehängte Indices dargestellt denken, wobei die Indices Elemente einer äquivalenten Menge bilden. Man wird daher von einer Menge N von Mengen M_a, M_b, M_n ... sprechen, wobei a, b, n Elemente einer zu N äquivalenten, sonst keiner Bedingung unterworfenen Menge N' sind. Diese Bezeichnung ist von besonderem Vorteil, wenn alle Mengen M_a, M_b, M_n ... von gleicher Mächtigkeit sind. Es sei dann M eine zu allen äquivalente Menge, α ein Element von M_n, so entspricht ihm ein ganz bestimmtes Element m in M und die Angabe von m und n bestimmt das Element N eindeutig, sodaß man es mit m_n, n_m, (m, n) oder einer ähnlichen Zusammenfassung bezeichnen kann.

Sind die Mengen M_a, M_b, ... nicht alle von gleicher Mächtigkeit, so ist doch der Fall möglich, z. B. wenn alle wohlgeordnet sind, daß es eine Menge M giebt, welche von höherer Mächtigkeit als alle Mengen M_a, M_b etc., vielleicht auch mit einem Teil von ihnen äquivalent ist. Es giebt dann zu jeder Menge M_n eine Abbildung auf eine Teilmenge T_n von M, so daß wiederum jedem Element von x ein Element m von M zugeordnet ist. Auch hier

kann x einem Indicespaar (m, n) eindeutig umkehrbar zugeordnet werden, nur entspricht nicht notwendig jedem Indicespaar ein Element x, vielmehr gehört zu jedem Index n eine Teilmenge T_n von Indices m, die mit n kombiniert, Elementen x entsprechen.

§ 47. Wie man aus zwei Mengen M, N Indiceskombinationen (m, n) bilden kann, so kann man auch aus drei, endlich vielen, unendlich vielen Mengen solche Reihen aufstellen. Während aber die Auswahl einer endlichen Anzahl von Indices durch Willkür erfolgen kann, erfordert die Auswahl unendlich vieler Indices ein Gesetz. Doch ist an sich jede unendliche Auswahl logisch möglich, so daß auch diese Erweiterung in Betracht gezogen werden kann. Es ist dann eine Menge M_a, M_b, ... M_n ... von Mengen gegeben; aus jeder ist ein Element x_a, x_b, ... x_n ... auszuwählen. Die Menge dieser Elemente stellt eine Indiceskombination vor. Die ursprünglichen Indices a, b, ... n bilden eine Menge N und jede Indexkombination entsteht dadurch aus N, daß jedes Element, a, b, ... n, ... durch ein Element der zu ihm gehörigen Menge M_a, M_b, ... M_n ... ersetzt wird.

Besonders einfach gestaltet sich der Fall, wenn wieder alle Mengen M_a, M_b, ... M_n ... von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M sind. Dann kann jedes Element x_n von M_n durch ein Indicespaar (m, n) ersetzt werden, und die Indiceskombination x_a, x_b, ... x_n ... sieht so aus: (s, a), (t, b) ... (m, n) ... Man nennt sie eine Belegung von N mit M, denn es ist jedes Element a, b, ... n, ... von N mit einem Element s, t, ... m, ... von M verbunden, „belegt", wobei die Elemente s, t, ... nicht von einander verschieden zu sein brauchen. Eine Belegung ordnet daher wohl jedem Element von N ein Element von M eindeutig zu, aber nicht jedem Element von M notwendig eines von N und

auch nicht notwendig nur eines. Sind M und N miteinander identisch, so ist eine Belegung nichts anderes als eine vollständige Funktion in M. (Kap. VIII).

§ 48. Sei jetzt M_a, M_b, ... M_n, ... eine Menge von Mengen, so definieren wir als Vereinigungsmenge $S = (M_a + M_b + \cdots M_n + \cdots)$ diejenige Menge, welche alle Elemente von M_a, M_b, ... M_n ... und nur diese enthält. Im folgenden werden stets die Mengen M_a, ... M_n ohne gemeinsame Elemente angenommen. Sie bilden daher ein komplementäres System von S.

Es ist ohne weiteres klar, daß die Vereinigungsmenge mit irgendwelcher Ordnung der Menge N der Indices $a, b, \ldots n$ nichts zu thun hat, ferner, daß sie auch schrittweise erfolgen kann, indem man N selbst in Teilmengen $(a, b, \ldots)$, $(n, p \ldots)$ zerlegt und zunächst $(M_a + M_b + \cdots)$, $(M_n + M_p + \cdots)$ bildet und diese Mengen wieder vereinigt. Für eine endliche Anzahl zu vereinigender Mengen, A, B, C, spricht sich das in den beiden Gesetzen $(A + B) = (B + A)$, $((A + B) + C) = (A + (B + C))$ aus, die man als kommutatives und associatives Gesetz bezeichnet.

§ 49. Sind die Mengen M_a, M_b, ... M_n alle von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M, so nennt man die Vereinigungsmenge auch die Verbindungsmenge von M mit N, $P = (M . N)$. Jedem Element von P ist, wie wir sahen, ein Elementenpaar (m, n) eindeutig zugeordnet und umgekehrt. Man bezeichnet daher wohl auch die Menge aller Elementenpaare (m, n) als die Verbindungsmenge selbst. Da man ein Elementenpaar ebensogut mit (m, n) wie mit (n, m) bezeichnen kann, ist offenbar $(M . N) = (N . M)$. Legt man indessen Wert auf die Reihenfolge, so ist $(M . N)$ nicht identisch mit $(N . M)$, aber äquivalent, da die Elemente der einen

denen der andern durch die Vertauschung umkehrbar eindeutig zugeordnet werden.

Verbindet man $(M.N)$ mit einer dritten Menge P, so entsteht die Menge aller Elemententripel (m, n, p), von denen m in M, n in N, p in P enthalten ist. Daraus erkennt man die Gültigkeit des associativen Gesetzes $((M.N).P) = (M.(N.P))$, welches die Verbindung dreier Mengen durch $(M.N.P)$ zu bezeichnen gestattet.

Ist $S = (M+N)$ und x ein Element von $(S.P)$, so ist $x = (s, p)$, wobei s in S, p in P ist. s ist aber nach der Definition von S entweder in M oder in N, d. h. x ist entweder (m, p), d. h. in $(M.P)$ oder (n, p), d. h. in $(N.P)$. Umgekehrt ist auch (m, p) in $(S.P)$, weil m in S, ebenso (n, p) in $(S.P)$, weil n in S. Die Mengen $(S.P)$ und $((M.P)+(N.P))$ sind daher identisch, womit das sogenannte distributive Gesetz ausgesprochen ist: $((M+N).P) = ((M.P)+(N.P))$.

Vereinigung und Verbindung befolgen mithin die formalen Gesetze der Addition und Multiplikation.

§ 50. Als Verbindung irgend einer Menge von Mengen M_a, M_b, ... M_n, ... ist konsequenterweise die Menge aller Indicesreihen x_a, x_b, ... x_n, ... zu bezeichnen, worin x_a aus M_a, x_b aus M_b, x_n aus M_n entnommen ist. Sind insbesondere die Mengen M_a, M_b, ... M_n, ... alle von gleicher Mächtigkeit mit einer Menge M, so ist ihre Verbindungsmenge die Menge aller Belegungen von N und M und wird daher als die Belegungsmenge von N mit M, $B = (M^N)$ bezeichnet. Speziell ist (M^2) die Verbindungsmenge von zwei äquivalenten Mengen M_1, M_2, (M^3) die von dreien, $(M_1.M_2.M_3)$ u. s. f. Wie die Verbindung als wiederholte Vereinigung, erweist sich die Belegung als wiederholte Ver-

bindung. Sie entspricht daher dem Potenzieren. Für sie gilt weder das assoziative noch das kommutative Gesetz, die ja schon für endliche Mengen ungültig sind. Wohl aber erhalten wir zwei distributive Gesetze, die ihr Analogon im Endlichen besitzen, nämlich

$$((M\,.\,N)^{P}) = ((M^{P})\,.\,(N^{P}))$$
$$(P^{(M+N)}) = ((P^{M})\,.\,(P^{N})).$$

Der Beweis dieser Gesetze macht keine Schwierigkeiten.

§ 51. Sind M und M', N und N' Paare äquivalenter Mengen, so sind auch $(M+N)$ und $(M'+N')$, $(M\,.\,N)$ und $(M'\,.\,N')$, (M^{N}) und $(M'^{N'})$ äquivalente Paare, da die Zuordnungen, die M auf M', N auf N' abbilden, auch die drei anderen Paare einander umkehrbar eindeutig in ihren Elementen zuordnen. Man kann daher die drei Operationen als Operationen mit Mächtigkeiten allein ansehen und nennt sie dann einfach Addition, Multiplikation und Potenzierung. Bei der Bezeichnung dieser Operationen benutzt man die gleichen Zeichen, wie bei dem Operieren mit den Mengen selbst, nur läßt man die Klammern nach den üblichen elementaren Regeln weg, soweit es angängig ist. Sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ die Mächtigkeiten von M, N, P, so sind $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ die Mächtigkeiten der Vereinigungs-, Verbindungs- und Belegungsmenge und es gelten die Sätze:

XLII. $\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p}$, $\quad \mathfrak{m}\,.\,(\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{p}) = (\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n})\,.\,\mathfrak{p}$

XLIII. $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathfrak{n}+\mathfrak{m}$ $\quad \mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{m}$

XLIV. $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{p}+\mathfrak{n}\mathfrak{p}$, $\quad (\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\,.\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$, $\quad \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\,.\,\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$.

§ 52. Alle drei Operationen haben wir schon kennen gelernt, z. B. ist die Menge der ganzen Zahlen die Vereinigung der Menge der geraden und der der ungeraden Zahlen. Alle drei haben die Mächtigkeit $\aleph_0$, so daß wir finden:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \text{d. h.} \qquad 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0,$$

woraus leicht $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ für jedes endliche n folgt.

Sodann bildeten wir beim Punktgitter die Verbindungsmenge von $\mathfrak{S}$ mit sich selbst, d. h. alle Indicespaare (m, n). Da diese Menge wieder abzählbar ist, folgt:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \qquad \text{d. h.} \qquad \aleph_0^2 = \aleph_0,$$

und daraus sofort

$$\aleph_0^n = \aleph_0$$

für jedes endliche n.

Ferner bildeten wir in den Kettenbrüchen die Menge aller vollständigen Funktionen in $\mathfrak{S}$, deren Mächtigkeit höher als $\aleph_0$ ist, nämlich die des Kontinuums. Diese Menge ist die Belegungsmenge $(\mathfrak{S}^{\mathfrak{S}})$, d. h. es ist

$$\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Da jede Zahl zwischen 0 und 1 auch durch einen unendlichen Dezimalbruch eindeutig beschrieben ist, ein solcher aber nichts anderes ist, als eine Belegung von $\mathfrak{S}$ mit den zehn Ziffern, ist die Mächtigkeit des Kontinuums auch gleich $10^{\aleph_0}$, und da die Wahl der Zehn als Basis offenbar der Willkür entspringt, auch gleich $n^{\aleph_0}$, worin $n > 1$. Somit ist:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}.$$

§ 53. Die Mächtigkeit $\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}}$ ist ganz allgemein die der Menge aller vollständigen Funktionen, die zu einer Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gehören. Aber auch für die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{m}}$ können wir eine einfache Deutung geben. Sei M eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so ist $2^{\mathfrak{m}}$ die Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen von M. Jede Belegung von M mit den Elementen

a, b einer Menge der Mächtigkeit 2 teilt nämlich M in zwei komplementäre Teilmengen M_1, M_2, von denen die eine alle mit a, die andere alle mit b belegten Elemente enthält.

Legt man statt der Zahl 10 die Zahl 2 als Basis der Zahlendarstellung zu Grunde, so erhält man das dyadische an Stelle des dekadischen Zahlsystems. Das dyadische Zahlsystem braucht nur 2 Ziffern, 0 und 1, und in ihm ist jede Zahl zwischen 0 und 1 durch einen dyadischen Bruch, d. h. eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von 2, dargestellt. Z. B.

$$0{,}101101 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{0}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{0}{32} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{45}{64}$$

$$0{,}1010101 \cdots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{128} + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 : \left(1 - \tfrac{1}{4}\right)\right) = \tfrac{2}{3}.$$

Jeder dyadische Bruch ist aber umkehrbar eindeutig einer Teilmenge von $\mathfrak{S}$ zugeordnet, nämlich den Nummern derjenigen Stellen, die mit einer 1 belegt sind. Das erste Beispiel entspricht der Menge (1, 3, 4, 6), das zweite der Menge aller ungeraden Zahlen.

§ 54. Als letztes Beispiel sei der in § 44 abgebrochene Beweis herangezogen. Es handelte sich um die Menge $\mathsf{A}(M)$, die entsteht, wenn für jedes Element ν von M eine Menge $\Phi(\nu)$ eingesetzt wird. Diese Menge $\mathsf{A}(M)$ ist also die Vereinigungsmenge der Mengen $\Phi(\nu)$, ν ist der Index der Menge $\Phi(\nu)$, M die Menge der Indices. Es war ferner angenommen, daß $\Phi(\nu)$ die Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ nicht übersteige. Sei nun N eine Menge dieser Mächtigkeit, so läßt sich jede Menge $\Phi(\nu)$ einer Teilmenge von N zuordnen, d. h. zu jedem Element x in $\Phi(\nu)$ gibt es in N ein entsprechendes ϱ, so daß jedem Element von $\mathsf{A}(M)$ ein Indicespaar (ν, ϱ) zugeordnet ist. $\mathsf{A}(M)$ ist damit einer Teilmenge von $(M \cdot N)$

äquivalent, seine Mächtigkeit, um deren Bestimmung es sich handelt, nicht höher als das Produkt der Mächtigkeiten von M und N.

Die Bestimmung des Produktes zweier Alefs ist nun Gegenstand der nächsten Kapitel, die sich mit wohlgeordneten Mengen im speziellen beschäftigen. Wir werden in § 77, Satz LXVII sehen, daß das Produkt $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$ gleich $\aleph_\alpha$ ist, wenn $\aleph_\beta$ nicht größer als $\aleph_\alpha$ ist. In unserem speziellen Fall ist M nicht von größerer Mächtigkeit als N, daher $M \cdot N \sim \aleph_\gamma$, somit ist $\mathsf{A}(M)$, d. h. auch der Limes μ der Typen in M nicht von größerer Mächtigkeit. Von geringerer Mächtigkeit kann μ auch nicht sein, da unter den Typen in M solche des $\aleph_\gamma$ vorkommen sollen. Demnach ist μ genau von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$.

XVI.

Kalkul mit Ordnungszahlen.

§ 55. Die Vereinigungsmenge einer endlichen oder unendlichen Reihe von Mengen $M_a, M_b, M_n \ldots$ kann wohlgeordnet werden, wenn jede der Mengen $M_a, M_b \ldots$ und die Menge N der Indices $a, b, \ldots n$ wohlgeordnet ist. Letztere kann insbesondere sofort wohlgeordnet werden, wenn sie endlich ist, so daß für eine endliche Anzahl von Mengen $M_1, M_2 \ldots M_n$ nur angenommen zu werden braucht, daß die Mengen selbst Wohlordnung besitzen.

Es seien x, y zwei Elemente der Vereinigungsmenge. Gehören sie zu derselben Menge M_n, so ist bereits durch deren Wohlordnung eine Ordnung zwischen x und y vorgeschrieben und diese behalten wir bei. Gehören dagegen x und y zu zwei verschiedenen Mengen M_p, M_n, so ist durch die Wohlordnung der Indices eine Ordnung zwischen p und n vorgeschrieben. Diese

übertragen wir auf x und y: Ist x in M_p, y in M_n und $p \prec n$, so sei auch $x \prec y$.

Auf diese Art ist zwischen zwei Elementen x, y der Vereinigungsmenge, sofern sie von einander verschieden sind, stets eine der Beziehungen $x \prec y$, $y \prec x$ eindeutig festgelegt. Der Nachweis der Postulate Ic—IIIc sowie der Wohlordnung (§ 33) kann dem Leser überlassen bleiben.

Die so geordnete Vereinigungsmenge bezeichnen wir unter Weglassung der Klammern mit $M_a + M_b + \cdots M_n + \cdots$. Wir beachten, daß das associative Gesetz $A + (B + C) = (A + B) + C$ nach wie vor erfüllt ist, daß dagegen das kommutative seine Gültigkeit verloren hat, weil die Anordnung der Indices wesentlich für unsere Ordnung der Vereinigungsmenge ist.

Sind die Mengen M_a und M_α, M_b und M_β, ... M_n und M_ν ähnlich und ebenso die Indicesmengen $(a, b, \ldots n \ldots)$ und $(\alpha, \beta, \ldots \nu \ldots)$, so sind auch die Vereinigungsmengen ähnlich; dies berechtigt uns, die Operation als eine Vereinigung von Ordnungstypen $\mu_a, \mu_b, \ldots \mu_n \ldots$ aufzufassen. Diese Operation befolgt also das Gesetz:

XLV. $$\mu + (\nu + \varrho) = (\mu + \nu) + \varrho = \mu + \nu + \varrho.$$

Dagegen ist $\mu + \nu$ von $\nu + \mu$ im allgemeinen verschieden. Beachtet man aber, daß $M + N$ und $N + M$ nur verschiedene Ordnungen derselben Menge darstellen, so ergibt sich, wenn auch nicht die Ähnlichkeit, so doch die Äquivalenz von $\mu + \nu$ und $\nu + \mu$:

XLVI. $$\mu + \nu \sim \nu + \mu.$$

§ 56. Sind alle Mengen $M_a, M_b, \ldots M_n \ldots$ ähnlich (nicht nur äquivalent!) zu ein und derselben Menge M, so entspricht jedem Element x der Vereinigungsmenge ein Paar von Indices (m, n), von denen m das zu x zugeordnete Element in M, n der Index

der x enthaltenden Menge M_n ist. Zwischen zwei Elementen $x = (m, n)$ $y = (p, q)$ besteht die Beziehung $x \prec y$, wenn entweder $n \prec q$, oder $n = q$, $m \prec p$ ist.

Hiermit ist eine Wohlordnung der Verbindungsmenge $(M \cdot N)$ ausgesprochen, die eine folgerichtige Weiterbildung derjenigen der Vereinigungsmenge vorstellt. Die so geordnete Verbindungsmenge bezeichnen wir mit $M \cdot N$, ihren Typus mit $\mu \cdot \nu$, wenn μ, ν die Typen von M, N sind. Sie besteht aus allen Elementenpaaren $(m, n), m$ in M, n in N, und bei der Ordnung $(m, n) \prec (p, q)$ gibt zuerst die Ordnung zwischen n und q, und erst, wenn $n = q$, die zwischen m und p den Ausschlag. Es befremdet im ersten Augenblick, daß trotzdem in dem Symbol $M \cdot N$ die Menge N, die das erste Kriterium abgibt, an zweiter Stelle steht. Dies ist aber durch gewisse Analogieen mit der Operation $\mu + \nu$ als das zweckmäßigere geboten. (Vgl. § 60).

§ 57. Bilden wir aus drei Mengen M, N, P die Verbindungsmenge $(M.N).P$, so ist ihre Ordnung folgendermaßen definiert: Sei $x = (s, p)$, $y = (s', p')$, s, s' in $(M.N)$, p, p' in P, so ist $x \prec y$ erstens, wenn $p \prec p'$, zweitens, wenn $p = p'$, $s \prec s'$. Nun ist aber weiter $s = (m, n)$, $s' = (m', n')$ und $s \prec s'$ erstens, wenn $n \prec n'$, zweitens, wenn $n = n'$, $m \prec m'$. Daraus ergibt sich durch Zusammenfassen: Es ist x definiert durch das Tripel (m, n, p), y durch (m', n', p') und es ist $x \prec y$: erstens, wenn $p \prec p'$; zweitens, wenn $p = p'$ $n \prec n'$; drittens, wenn $p = p'$, $n = n'$, $m \prec m'$.

Hieraus ergibt sich mühelos das associative Gesetz:

$$(M.N).P = M.(N.P) = M.N.P$$

und das entsprechende für Ordnungstypen

XLVII. $$(\mu.\nu).\varrho = \mu.(\nu.\varrho) = \mu.\nu.\varrho.$$

Die Menge $M.N$ ist dagegen anders geordnet, als $N.M$, so daß das kommutative Gesetz seine Gültigkeit einbüßt. Da aber die Menge $M.N$ und $N.M$ nur durch die Ordnung unterschieden sind, während sie in den Elementen übereinstimmen, sind sie immerhin äquivalent, d. h. es ist:

XLVIII. $$\mu . \nu \sim \nu . \mu$$

§ 58. Zwischen der Addition und der Multiplikation der Ordnungszahlen besteht ein distributives Gesetz, nämlich

XLIX. $$\varrho(\mu + \nu) = \varrho\mu + \varrho\nu$$

dagegen das zweite nur in der Form

L. $$(\mu + \nu)\varrho \sim \mu\varrho + \nu\varrho.$$

Seien nämlich x, y zwei Elemente von $\varrho(\mu + \nu)$, so sind sie auch Elemente von $\varrho\mu + \varrho\nu$, da beide Mengen nach § 49 aus denselben Elementen bestehen. Wir haben daher nur die Ordnung nachzuprüfen. Nun ist $x = (r, s)$, $y = (r', s')$, r, r' in ϱ, s, s' in $\mu + \nu$. Ist zunächst $s = s'$, so sind beide zugleich in ϱ oder in ν, also x, y beide zugleich in $\varrho\mu$ oder in $\varrho\nu$. Ihre Ordnung ist die von r, r', also die gleiche in $\varrho(\mu + \nu)$ wie in $\varrho\mu + \varrho\nu$. Ist dagegen s von s' verschieden, so sind 3 Fälle möglich, jenachdem beide in μ, in ν, oder eines in μ, eines in ν enthalten sind. In allen dreien übersieht man wiederum leicht die Übereinstimmung der Ordnung in $\varrho(\mu + \nu)$ und $\varrho\mu + \varrho\nu$. Gerade der letzte Fall, s in μ, s' in ν zeigt aber auch, daß die Ordnungen in $(\mu + \nu)\varrho$ und $\mu\varrho + \nu\varrho$ nicht übereinstimmen. Es ist dann nämlich $x = (s, r)$ in $\mu\varrho$, $y = (s', r')$ in $\nu\varrho$, also in $\mu\varrho + \nu\varrho : x \prec y$. In $(\mu + \nu)\varrho$ dagegen richtet sich die Ordnung nach der von r, r', kann daher die umgekehrte sein.

§ 59. Einige einfache Beispiele mögen das vorstehende erläutern. Setzt man einer Menge vom Typus ω ein Element vor,

so ändert sich der Typus nicht. Es ist $1+\omega = \omega$. Dagegen ist $\omega+1$ ein von ω verschiedener, nämlich der nächst höhere Typus. Es ist also

$$\omega+1 \succ 1+\omega.$$

Ersetzt man weiter jedes Element der Menge $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ vom Typus ω durch k Elemente $a_n, b_n, c_n, \ldots k_n$, so entsteht die Menge vom Typus $k.\omega$:

$$a_1, b_1, \ldots k_1, a_2, b_2, \ldots k_2, a_3, b_3, \ldots k_3, \ldots a_n, b_n, \ldots k_n, \ldots$$

die wieder vom Typus ω ist. Dagegen hat die Menge $\omega.k$ den Typus

$$a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots, \ldots k_1, k_2, \ldots k_n \ldots,$$

ist also von höherem Typus als ω, da der zu b_1 gehörige Abschnitt schon von Typus ω ist. Es ist daher:

$$k.\omega = \omega, \qquad \omega.k \succ k.\omega. \qquad (k \text{ endlich})$$

Zugleich sieht man, daß $\omega.k$ aus k hintereinandergesetzten Mengen vom Typus ω besteht. Es ist in der Tat allgemein nach dem distributiven Gesetz XLIX:

$$\alpha+\alpha = \alpha(1+1) = \alpha.2, \qquad \alpha.2+\alpha = \alpha.3 \text{ etc.}$$

Daraus folgt für $\alpha = \omega+1$:

$$(\omega+1).2 = (\omega+1)+(\omega+1) = \omega+(1+\omega)+1 = \omega+\omega+1 = \omega.2+1,$$

d. h. es ist

$$(\omega+1).2 \prec \omega.2+2$$

Hiermit ist für jedes der nicht gültigen Gesetze ein besonderes Beispiel aufgewiesen.

XVII.

Ungleichungen und Umkehrungen.

§ 60. Aus der Definition von $M+N$ und $\mu+\nu$ geht ohne weiteres hervor, daß M ein Abschnitt von $M+N$ ist, also ist stets:

LI a. $$\mu+\nu \succ \mu$$

Ist umgekehrt $M \prec S$, so heißt dies, daß S einen zu M ähnlichen Abschnitt M' besitzt. Die zu M' komplementäre Menge sei N, so ist $S = M' + N$. Nennen wir μ, σ und ν die Typen von M, S und N, so folgt aus $\mu \prec \sigma$ die Existenz eines (von Null verschiedenen) Typus ν, für den $\mu + \nu = \sigma$ wird. Dieser Typus ist, wie man sieht, eindeutig bestimmt.

Während der Ordnungstypus eines Abschnittes $A(m)$ das Element m eindeutig bestimmt und zu jedem Typus $\mu' \prec \mu$ auch ein Abschnitt gehört, bestimmt der Typus eines Restes $R(m)$ das Element nicht eindeutig und es gehört nicht zu jedem Typus unter μ ein Rest. Z. B. haben alle Reste des Typus ω wieder den Typus ω. Mit Sicherheit läßt sich also nur sagen, daß der Typus eines Restes nicht höher sein kann, als der der Menge, d. h.

LI b. $$\mu + \nu \geqq \nu.$$

Ist $\alpha \prec \beta$, so ist α ein Abschnitt von β, $\beta = \alpha + \gamma$. Daraus folgt weiter $\mu + \beta = \mu + (\alpha + \gamma) = (\mu + \alpha) + \gamma$, also ist $\mu + \alpha$ ein Abschnitt von $\mu + \beta$. Ebenso folgt $\beta + \mu = \alpha + \gamma + \mu$, daher ist $\alpha + \mu$ eine Teilmenge von $\beta + \mu$, daher sicher nicht höher als $\beta + \mu$:

LI c. Aus $\alpha \prec \beta$ folgt $\mu + \alpha \prec \mu + \beta$ und $\alpha + \mu \preceq \beta + \mu$.

Ferner folgt aus $\beta = \alpha + \gamma$ auch $\mu\beta = \mu(\alpha + \gamma) = \mu\alpha + \mu\gamma$, also $\mu\alpha \prec \mu\beta$. Zugleich wird $\beta\mu = (\alpha + \gamma)\mu$. Das distributive Gesetz läßt sich hier nicht anwenden. Sind aber A, C, M Mengen von den Typen α, γ, μ, so stimmt $A . M$ in seinen Elementen und ihrer Anordnung mit einer Teilmenge von $(A + C) . M$ überein, ist daher nach Satz XXVII (§ 38) gewiß nicht von höherem Typus als $(A + C) . M$. D. h.

LI d. Aus $\alpha \prec \beta$ folgt $\mu\alpha \prec \mu\beta$ und $\alpha\mu \preceq \beta\mu$.

Die Sätze LI c und d enthalten diejenige Analogie, welche in § 56 der Bezeichnung $M . N$ vor $N . M$ den Vorzug gab. In beiden

Sätzen ist es die durch das V o r s e t z e n angedeutete Operation, die aus der Ungleichung wieder eine Ungleichung macht.

Durch logische Umkehrung schließt man aus LIc und d:

LI e. A u s $\mu+\alpha \prec \mu+\beta$, $\alpha+\mu \prec \beta+\mu$, $\mu\alpha \prec \mu\beta$, $\alpha\mu \prec \beta\mu$ f o l g t s t e t s: $\alpha \prec \beta$. A u s $\mu+\alpha = \mu+\beta$, $\mu\alpha = \mu\beta$ f o l g t s t e t s $\alpha = \beta$.

§ 61. Die vorangehenden Betrachtungen enthalten bereits den für die Umkehrung der Addition wichtigen Satz:

LII. I s t $\alpha \prec \beta$, s o g i b t e s e i n e u n d n u r e i n e Z a h l ξ, d i e d e r G l e i c h u n g $\alpha+\xi = \beta$ g e n ü g t.

Wir müssen weiterhin auch die Multiplikation umzukehren versuchen und werden dabei folgendes Resultat finden:

LIII. I s t $\alpha \prec \beta$, s o g i b t e s e i n e u n d n u r e i n e Z a h l ξ d i e d e n B e d i n g u n g e n $\beta \geqq \alpha\xi$ u n d $\beta \prec \alpha(\xi+1)$ g e n ü g t. S i e b e s t i m m t d a h e r e i n d e u t i g e i n e Z a h l $\varrho \prec \alpha$, d i e m i t i h r z u s a m m e n d e r G l e i c h u n g $\beta = \alpha\xi + \varrho$ genügt.

Zum Beweise dieses Satzes beachten wir, daß jeder Abschnitt des Typus $\mu . \nu$ die Form $\mu\nu' + \mu'$ hat, worin ν' und μ' Abschnitte von ν und μ sind. Sind nämlich M, N zwei Mengen von den Ordnungstypen μ und ν und $x = (m, n)$ ein Element von $M.N$, so besteht der Abschnitt $A(x)$ aus allen Elementen (m', n') für die $n' \prec n$, m' beliebig ist, und aus allen Elementen (m', n), für die $m' \prec m$ ist. Die ersten bilden eine Menge vom Typus $\mu\nu'$, worin ν' der Typus von $A(n)$ in N, die zweiten eine Menge vom Typus μ' von $A(m)$ in M, und da die ersten wegen $n' \prec n$ vor die zweiten geordnet sind, folgt unsere Behauptung.

Nun besteht (nach LI d), wenn $1 \prec \alpha$ angenommen wird, ($\alpha = 1$ gibt den Trivialfall $\beta = 1 . \beta + 0$) die Ungleichung $\beta \leqq \alpha\beta$.

Ist $\beta = \alpha\beta$, so ist unser Satz erwiesen, $\xi = \beta$, $\varrho = 0$. Ist $\beta \prec \alpha\beta$, so ist es ein Abschnitt von $\alpha\beta$, also von der Form $\alpha\xi + \varrho$, $\xi \prec \beta$, $\varrho \prec \alpha$.

§ 62. Aus der Darstellung der Abschnitte von $\mu\nu$ folgern wir noch einen einfachen Satz über die Reste von $\mu\nu$, der analog zu beweisen ist:

LIV. **Jeder Rest von $\mu\nu$ hat die Form $\sigma + \mu\tau$, worin σ Rest von μ und $1 + \tau$ Rest von ν ist.**

Ist nämlich $\mu\nu' + \mu'$ der zu dem gegebenen Rest ϱ komplementäre Abschnitt, so ist $\mu = \mu' + \sigma$, σ der zu μ' komplementäre Rest, $\nu = \nu' + (1 + \tau)$, $1 + \tau$ der zu ν' komplementäre Rest. (Da ein Rest mindestens ein Element enthält, nämlich dasjenige, zu dem er gehört, so ist der kleinste mögliche Rest sicher vom Typus 1, so daß sicher jeder Resttypus auf die Form $1 + \tau$ gebracht werden kann. Im allgemeinen wird τ auch ein Resttypus sein, er kann aber auch 0 sein und ist dann gewiß kein Rest.) Um nun zu zeigen, daß ϱ die Form $\sigma + \mu\tau$ hat, bilden wir die Vereinigung von ϱ mit seinem Abschnitt und sehen, daß dieselbe $\mu\nu$ ergibt. In der Tat ist

$$(\mu\nu' + \mu') + (\sigma + \mu\tau) = \mu\nu' + (\mu' + \sigma) + \mu\tau = \mu\nu' + \mu + \mu\tau$$
$$= \mu(\nu' + 1 + \tau) = \mu\nu.$$

Damit ist LIV bewiesen. Wir ziehen daraus einen einfachen Schluß. Wenn eine Menge ein letztes Element besitzt, so ist dieses ein Rest vom Typus 1. Wenn nun $\mu\nu$ ein letztes Element hat, so muß es möglich sein, σ und τ so zu bestimmen, daß $1 = \sigma + \mu\tau$ wird. Wäre $\sigma \succ 1$, so wäre a fortiori $\sigma + \mu\tau \succ 1$. Daher kann nur $\sigma = 1$ sein, denn da es Rest von μ ist, kann σ nicht den fiktiven Abschnittstypus 0 haben. Aus $1 = 1 + \mu\tau$ folgt aber weiter $0 = \mu\tau$, also $\tau = 0$, demnach $1 + \tau = 1$. Es haben also

μ und ν je einen Rest vom Typus 1, d. h.: Besitzt $\mu\nu$ ein letztes Element, so auch μ und ν einzeln. —

§ 63. Sei β eine beliebige unendliche Ordnungszahl, so läßt sie sich nach LIII auf die Form $\omega . \xi + \varrho$ bringen, worin $\varrho \prec \omega$, d. h. endlich ist. Ist ϱ nicht null, so besitzt daher β ein letztes Element. Besitzt umgekehrt β kein letztes Element, so ist $\beta = \omega . \xi$, d. h. eine Limeszahl.

LV. Ein Limestypus ändert sich nicht, wenn jedes seiner Elemente durch eine endliche Anzahl von Elementen ersetzt wird.

Der Satz ist bereits im Kapitel VI, § 17 für den Typus ω bewiesen worden, nur daß die Fassung des Satzes XV die Ordnung nicht betont, da es sich dort lediglich um die Mächtigkeit handelt. Der Beweis des Satzes bringt aber bereits die Unveränderlichkeit des Ordnungstypus klar zum Ausdruck. Auch überzeugt man sich, ohne zurückzugreifen, leicht, daß jeder Abschnitt desjenigen Typus, der aus ω durch das Einsetzen endlicher Mengen entsteht, wieder endlich, der Typus selbst also wieder ω ist.

Wie nun die Gleichung $\beta = \omega \xi$ zeigt, ist β die Vereinigungsmenge einer Menge $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots$ von Typen ω, deren Indices den Typus ξ bilden. Da keine einzige dieser Mengen ihren Typus ändert, wird auch der Typus von β durch das Einsetzen endlicher Mengen für jedes Element nicht geändert, was zu beweisen war.

Eine noch einfachere Betrachtung zeigt, daß durch das Vorsetzen einer endlichen Anzahl n von Elementen kein Typus, der unendlich ist, geändert wird. Es gilt offenbar zunächst von ω, denn die Abschnitte von $n + \omega$ sind alle endlich, was bereits im vorigen Kapitel für $1 + \omega = \omega$ gezeigt war. Ist nun $\beta \succ \omega$, so ist $\beta = \omega + \varrho$, also $n + \beta = n + (\omega + \varrho) = (n + \omega) + \varrho = \omega + \varrho = \beta$.

Hieraus läßt sich folgern, daß auch $n+\beta \sim \beta$ ist, ein Satz, der bereits für alle transfiniten Mengen in Kap. VII bewiesen ist (Satz XVIII). Überhaupt lassen sich an dieser Stelle bereits eine ganze Anzahl von Resultaten über Mächtigkeiten ableiten. Wir hatten in § 19 gesehen, daß das Punktgitter die Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Die Typen $\omega\ \omega$ und ω sind also von gleicher Mächtigkeit. Ist nun $\beta = \omega \cdot \xi + \varrho$, so ist nach XLVI $\beta \sim \varrho + \omega \cdot \xi$, und da ϱ endlich ist: $\beta \sim \omega \cdot \xi$. Nun ist weiter $\xi = \omega \cdot \eta + \sigma$ und analog $\xi \sim \omega \cdot \eta$. Setzt man andererseits ξ in $\beta \sim \omega \cdot \xi$ ein, so wird: $\beta \sim \omega \cdot \omega \cdot \eta \sim (\omega \cdot \omega) \cdot \eta \sim \omega\ \eta \sim \xi$. D. h.: Ist $\beta = \omega \cdot \xi + \varrho$, so ist auch $\beta \sim \xi$. Das gleiche folgt auch aus einem Ansatz $\beta = \xi \cdot \omega$, denn es wird $\xi \cdot \omega \sim \omega \cdot \xi \sim \xi$ nach Satz XLVIII. Diese Betrachtungen führen aber nicht zu einem allgemeinen Satz über das Produkt zweier Alefs.

XVIII.

Die Hauptzahlen.

§ 64. **Als Hauptzahl oder Haupttypus definieren wir eine Zahl, die allen ihren Resten gleich ist.**

Es gibt eine und nur eine endliche Hauptzahl, nämlich 1. Sie besitzt nur ein Element, also nur einen Rest, und der besteht aus diesem einen Element. Unter den unendlichen Typen ist sicher ω ein Haupttypus.

Ist h eine Hauptzahl, $\alpha \prec h$, so ist α ein Abschnitt von h, daher nach der Definition

$$h = \alpha + h.$$

Diese Gleichung kann umgekehrt als Definition der Hauptzahl gelten. Denn sie sagt aus, daß α ein Abschnitt von h, also sicher $\alpha \prec h$ ist, und daß der zugehörige Rest wieder den Typus h hat.

Zugleich aber sehen wir aus ihr, daß ein Haupttypus sich nicht ändert, wenn man einen niederen Typus voransetzt. Z. B. ist für endliche n stets $n+\omega = \omega$.

Ist weiterhin $\alpha \prec h$, so ist nach LIII $h = \alpha k + \varrho$, $\varrho \prec \alpha$, also $\varrho \prec h$; dies ist nur möglich für $\varrho = 0$, sonst wäre ϱ ein Rest von h, also gleich h und nicht niederer. Daraus folgt:

Ein Haupttypus ist Multiplum jedes niederen Typus,

$$h = \alpha k.$$

k ist wieder ein Haupttypus. Denn wäre $k = \beta + k'$, $k' \prec k$, so folgte durch Multiplikation mit α: $h = \alpha k = \alpha\beta + \alpha k'$ und $\alpha k' \prec \alpha k$, i. e. $\alpha k' \prec h$, gegen die Definition von h.

Zugleich gilt die Umkehrung: Ist k ein unendlicher Haupttypus, so auch αk. Nach LIV hat nämlich jeder Rest von αk die Form $\sigma + \alpha\tau$, worin $1+\tau$ Rest von k, also $1+\tau = k$, und da k unendlich, $\tau = k$. Nun ist $\sigma + \alpha k$ als Rest von αk sicher nicht höher, nach LIb aber auch sicher nicht niederer, demnach gleich αk, d. h. αk ist ein Haupttypus.

Daß für den endlichen Haupttypus 1 der Satz nicht gilt, ist klar, da $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

§ 65. Ist α eine beliebige Zahl, so ist $\alpha\omega$ ein Haupttypus und $\alpha\omega \succ \alpha$ nach LId, es gibt also über α Haupttypen. Unter diesen ist einer der niederste, nämlich $\alpha\omega$ selbst: Sind k und h Haupttypen über α und $k \prec h$, so ist zunächst nach dem vorigen Paragraphen $k = \alpha k'$, $h = \alpha h'$, und aus $\alpha k' \prec \alpha h'$ folgt nach LIe: $k' \prec h'$. Da weiter k' und h' Haupttypen sind und ω der niederste unendliche, ist $\alpha\omega \preceq h$, wenn h ein Haupttypus über α ist, d. h. $\alpha\omega$ ist der auf α unmittelbar folgende Haupttypus.

Es gibt aber auch unter allen Haupttypen unterhalb α einen

höchsten, falls α nicht selbst ein Haupttypus ist. Dies beweisen wir auf Grund folgenden Satzes:

LVI. **Der Limes einer Menge von Hauptzahlen ist selbst eine Hauptzahl.**

Nehmen wir ihn zunächst als bewiesen an, so sei α ein Typus, unterhalb dessen ein höchster Haupttypus nicht existiert. Dann sei k der Limes aller Haupttypen $h \prec \alpha$, und es ist $k \mathrel{\substack{=\\<}} \alpha$ nach dem Limesbegriff. Da nach LVI k selbst ein Haupttypus ist, ist $k \prec \alpha$ ausgeschlossen, weil ja dann k selbst zu den Typen gehörte, deren Limes er sein soll. Es ist also $\alpha = k$, d. h. α ein Haupttypus. Und ist α kein Haupttypus, so muß es demnach unter den Haupttypen $h \prec \alpha$ einen höchsten geben; diesen nennen wir den höchsten in α enthaltenen Haupttypus oder schlechtweg den „**höchsten Haupttypus von** α". Diese Begriffsbestimmung dehnen wir auf den Fall aus, daß α ein Haupttypus ist; wir nennen dann α selbst seinen höchsten Haupttypus. Das Resultat fassen wir in folgendem Satz zusammen:

LVII. **Zu jeder Zahl α gibt es eine Hauptzahl h, die folgenden Bedingungen genügt:**

$$h \leqq \alpha \prec h\omega, \qquad h\omega = \alpha\omega.$$

Nun bleibt noch der Beweis zu LVI nachzutragen. Wäre der Limes H einer Menge M von Haupttypen h kein Haupttypus, so besäße H einen Rest von niederem Typus, d. h. es wäre $H = \alpha + \beta$, $\beta \prec H$. Da eo ipso $\alpha \prec H$, gäbe es in M einen Typus h, für den $\alpha \prec h$, $\beta \prec h$, daher $\alpha + \beta \prec \alpha + h$ wäre. Da h ein Haupttypus, wäre $\alpha + h = h$, also $H \prec h$ gegen die Definition von H. H ist also ein Haupttypus.

§ 66. Da nach § 63 (Schluß) $h \sim h\omega$ und $\alpha \sim \alpha\omega$, folgt sogleich $\alpha \sim h$ aus $h\omega = \alpha\omega$, d. h.

LVIII. **Eine transfinite Zahl hat die Mächtigkeit ihres größten Haupttypus.**

und daraus:

LIX. **Jede Anfangszahl ist eine Hauptzahl.**

Denn sonst ginge ihr ein Haupttypus **gleicher** Mächtigkeit voran, sie wäre also keine Anfangszahl. Es gibt also zu jeder Mächtigkeit Hauptzahlen.

§ 67. Ganz analog wie die Alefs kann man nun auch alle Haupttypen durch einen Buchstaben, etwa h, mit einer Ordnungszahl α als Index bezeichnen, wobei α der Typus der Menge aller vor h_α gelegenen Hauptzahlen ist. Danach ist zunächst $1 = h_0$, $\omega = h_1$, $\omega \cdot \omega = h_2$, allgemein

$$h_{\alpha+1} = h_\alpha \cdot \omega = h_\alpha \cdot h_1 \tag{1}$$

und ferner (2) $h_\alpha \prec h_\beta$ wenn $\alpha \prec \beta$ und umgekehrt.

Für diese Indices gilt nun der Satz:

$$h_\alpha \cdot h_\beta = h_{\alpha+\beta}. \tag{3}$$

Es sei nämlich α beliebig, $\beta = 1$, so gilt (3) nach (1). Sei weiterhin ξ die erste Zahl, für die $h_\alpha \cdot h_\xi$ von $h_{\alpha+\xi}$ verschieden ist, so ist entweder $h_\alpha h_\xi \prec h_{\alpha+\xi}$ oder $h_\alpha h_\xi \succ h_{\alpha+\xi}$.

Nun ist $h_\alpha h_\xi$ sicher ein Haupttypus und höher als h_α, also $h_\alpha h_\xi = h_{\alpha+\eta}$. Im ersten Fall, $h_\alpha h_\xi \prec h_{\alpha+\xi}$, folgt danach $h_{\alpha+\eta} \prec h_{\alpha+\xi}$, woraus nach (2) und (LId, e) $\eta \prec \xi$, $h_\eta \prec h_\xi$, $h_\alpha h_\eta \prec h_\alpha h_\xi$, endlich $h_\alpha h_\eta \prec h_{\alpha+\eta}$ folgt, gegen die Annahme, daß für alle Zahlen unter ξ (3) gültig sein soll.

Andererseits ist $h_{\alpha+\xi}$ sicher höher als h_α, also $h_{\alpha+\xi} = h_\alpha \cdot h_\zeta$, woraus im zweiten Fall successive folgt: $h_\alpha h_\xi \succ h_\alpha h_\zeta$, $h_\xi \succ h_\zeta$,

$\mathfrak{x} > \xi$, $\alpha + \mathfrak{x} > \alpha + \xi$, $h_{\alpha+\mathfrak{x}} = h_\alpha h_\xi > h_{\alpha+\xi}$, wiederum gegen die Definition von $\mathfrak{x}$.

Demnach ist (3) allgemein gültig, d. h. die Indices besitzen die charakteristische Eigenschaft der Exponenten. Da nun $h_1 = \omega$, $h_2 = \omega \cdot \omega = \omega^2$, $h_3 = \omega^2 \cdot \omega = \omega^3$ u. s. f., so bezeichnen wir allgemein den Haupttypus vom Index α mit ω^α und haben damit alle Potenzen des Typus ω definiert.

§ 68. Diese Definition ist nicht nur formal, sondern auch sachlich vollkommen verschieden von der der Mächtigkeitspotenz. Dies möge an einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Die Typen $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots$ sind nichts anderes als Vereinigungsmengen von $\mathfrak{G}$ mit sich selbst, $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^2, \mathfrak{G}^3$, u. s. f. Speziell ist jedes Element von ω^2 ein Indexpaar (m, n); ω^3 ist die Menge aller Indicestripel (m, n, p), worin m, n, p ganze Zahlen und die Ordnung der Elemente die bereits früher definierte ist.

Betrachten wir nun den Limes aller Typen ω^n für endliches n. Es ist, da alle Haupttypen sind, $\omega^2 = \omega + \omega^2$, $\omega^3 = \omega + \omega^2 + \omega^3$, $\omega^n = \omega + \omega^2 + \cdots \omega^n$ u. s. f., daher der Limes gleich $\omega + \omega^2 + \omega^3 \cdots$ in inf. Dieser Typus ist nach der Definition des Exponenten mit ω^ω zu bezeichnen. Jedes seiner Elemente ist in einem Typus ω^n mit endlichem n enthalten, daher durch eine endliche Anzahl ganzer Zahlen darstellbar, da ihm n Indices in ω^n entsprechen. **Nach dem Satz der endlichen Bezeichnung**[1] **ist somit** ω^ω **ein abzählbarer Typus, während** $\aleph_0^{\aleph_0}$ **als die Mächtigkeit des Kontinuums erkannt war.**

Es ist leicht, die Menge $\mathfrak{G}$ direkt nach dem Typus ω^ω zu

[1] Jedes Element ist durch die 10 Ziffern und ein Trennungszeichen zur Unterscheidung der n Indices, etwa ein Komma, darstellbar.

ordnen. Jede ganze Zahl läßt sich nämlich eindeutig in eine endliche Anzahl n von Primfaktoren zerlegen. Die Reihe der Primzahlen hat selbst den Typus ω, weil sie einerseits Teilmenge von $\mathfrak{G}$, andererseits unendlich ist, was schon Euklid bewies.

Sind nun p, q zwei ganze Zahlen, so denken wir beide in ihre Primfaktoren gespalten und diese der Größe nach geordnet. Ist die Zahl der Faktoren in q größer, als in p, so ordnen wir p vor q. Ist sie gleich, so suchen wir in p den ersten Primfaktor, der von dem entsprechenden in q verschieden ist und ordnen die Zahlen nach der Größe dieser Primfaktoren. Hiernach entsteht folgender Ordnungstypus:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... | 4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 38, ... | 9, 15, 21, 33, 39, 51, ... | 25, 35, 55, 65, 85, 95, ... | 49, 77, 91, ... | 121, 143, 187, ... | .... | ...
| 8, 12, 20, 28, ... | 18, 30, 42, 66, ... | 50, 70, 110, ... | ... | ... | 27, 45, ... | 75, 105, 165, ... | ... | ...
u. s. w.

Voran steht die Reihe der Primzahlen; ihr folgt die Reihe der Zahlen von der Form $2p$, p eine Primzahl $\geqq 2$, dieser $3p$, $p \geqq 3$, $5p$, $p \geqq 5$ u. s. f. Sodann folgt die Reihe $2 \cdot 2p$, $p \geqq 2$, $2 \cdot 3p$, $p \geqq 3$, $2 \cdot 5p$, $p \geqq 5$, u. s. f. Weiter $3 \cdot 3p$, $p \geqq 3$, $3 \cdot 5p$, $p \geqq 5$ etc. Der Typus ist ω^{ω}; seine Abzählbarkeit ist evident.

In ähnlicher Weise kann man die Menge der Rationalzahlen zwischen 0 und 1 nach dem Typus ω^{ω} ordnen. Denn jeder Rationalzahl entsprechen die (in endlicher Anzahl vorhandenen) Nenner ihrer Kettenbruchentwicklung, die ein n-tupel ganzer Zahlen bilden. Dabei erhielte man die Anordnung:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}, \frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \ldots \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2+\frac{1}{3}}, \frac{1}{2+\frac{1}{4}}, \ldots, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}, \ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}, \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}, \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}, \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}, \ldots \text{ etc.}$$

XIX.

Die Cantorsche Normalform.

§ 69. Den Betrachtungen des folgenden Kapitels stellen wir folgenden allgemeinen Satz voran:

LX. Wenn jede Teilmenge einer geordneten Menge M sowohl ein erstes wie ein letztes Element besitzt, so ist M endlich[1].

Denn zunächst ist M wohlgeordnet, daher mit ω komparabel hinsichtlich der Ähnlichkeit. Wäre aber $M \succ \omega$, so wäre der zu ω ähnliche Abschnitt, und wäre $M \simeq \omega$, so jeder Rest von M eine Teilmenge ohne letztes Element. Daher ist $M \prec \omega$, d. h. einem Abschnitt von ω ähnlich, also endlich.

---

[1] Diese Eigenschaft endlicher Mengen ist ein fruchtbares Ergebnis der mengentheoretischen Untersuchungen. Auf sie stützen sich eine ganze Reihe der schönsten Vereinfachungen zahlentheoretischer Betrachtungen, die man in neuerer Zeit ausgedacht hat. Vgl. Kap. XXVII.

Daraus folgt sofort weiter:

LXI. Seien M, N zwei wohlgeordnete Mengen und umkehrbar eindeutig so aufeinander abgebildet, daß aus $m \prec m'$ in M zwischen den entsprechenden Elementen $\varphi(m)$, $\varphi(m')$ in N die Ordnung $\varphi(m) \succ \varphi(m')$ folgt, so sind beide endlich.

Sehen wir zunächst von der Wohlordnung ab und betrachten eine Teilmenge M' von M und die entsprechende $N' = \varphi(M')$ in N. Besitzt M' ein erstes Element m, so ist $\varphi(m)$ letztes in N', weil aus $m \prec m'$ für jedes m' in M' $\varphi(m) \succ \varphi(m')$ für jedes Element $\varphi(m')$ von N' folgt. Ist also M wohlgeordnet, so besitzt jede Teilmenge von N ein letztes Element, zugleich aber ein erstes, wenn auch N wohlgeordnet ist, woraus nach LX die Behauptung folgt.

§ 70. Nunmehr beweisen wir sogleich, als Anwendung von LXI, folgenden Satz:

LXII. Die Menge aller Ordnungszahlen, welche Reste einer gegebenen Ordnungszahl sein können, ist endlich.

Sei nämlich ϱ der Typus eines Restes $R(a)$ einer wohlgeordneten Menge M, und a unter allen Elementen von gleichem Resttypus das erste[1]. Es ist durch ϱ eindeutig bestimmt, ebenso umgekehrt ϱ durch a. Die Menge R der Resttypen ϱ ist als Menge von Typen wohlgeordnet, die Menge A der Elemente a als Teilmenge von M. Sind ϱ, σ Elemente in R, a, b die entsprechenden in A, so ist $\varrho \simeq R(a)$, $\sigma \simeq R(b)$. Daher folgt aus $\varrho \prec \sigma$ sogleich

[1] Es genügt für den Beweis, daß es ein bestimmtes sei. Das erste wird gewählt um keine willkürliche Auswahl anzuwenden.

$R(a) \prec R(b)$ und nach § 38 (Schluß) $a \succ b$. Nach LXI sind daher A und R endlich.

Der höchste unter den Typen ϱ ist der Typus μ der Menge selbst. Der niederste und nur dieser ist ein Haupttypus. Denn ist $\sigma \prec \varrho$, so ist σ ein Rest von ϱ, also ϱ kein Haupttypus. Und ist σ der niederste Typus in R, so ist jeder seiner Reste als Rest von σ nicht höher, als Resttypus in M nicht niederer wie σ, also ähnlich zu σ, d. h. σ ist ein Haupttypus. R enthält daher dann und nur dann ein einziges Element, wenn der Typus von M ein Haupttypus ist.

§ 71. Es sei μ ein beliebiger Typus, der kein Haupttypus ist, h der höchste in μ enthaltene Haupttypus, ϱ unter den von μ verschiedenen Resten von μ der höchste. Daß es einen höchsten gibt, folgt aus LXII. Dann ist $\mu = h + \varrho$.

Zum Beweise nennen wir σ den zu h gehörigen Rest von μ und zeigen, daß es keinen höheren Resttypus in μ geben kann, außer μ selbst. Sei nämlich $\mu = \alpha + \beta$ und $\beta \succ \sigma$. Wäre $\alpha \succ h$, so wäre $\alpha = h + \gamma$, $\mu = h + \gamma + \beta$ und wegen $\mu = h + \sigma$ nach LI e: $\sigma = \gamma + \beta$ gegen $\beta \succ \sigma$. Also ist $\alpha \prec h$, $h = \alpha + h$, da h ein Haupttypus nach Voraussetzung. Damit wird $\mu = h + \sigma = \alpha + (h + \sigma)$, d. h. nach LI e: $h + \sigma = \beta$, $\beta = \mu$, w. z. b. w. Dieser Beweis zeigt zugleich, daß h unter allen Abschnitten, die dem größten Resttypus ϱ komplementär sind, der niederste ist.

Es ist noch leicht zu zeigen, daß der größte Haupttypus h' von ϱ nicht höher wie h sein kann. Denn dann wäre $\varrho = h' + \varrho'$, $\mu = h + h' + \varrho'$ und wegen $h \prec h'$: $h + h' = h'$, d. h. $\mu = h' + \varrho'$; dies geht sowohl gegen die Annahme $h' \succ \mu$ wie gegen $\mu \succ \varrho$.

Die Ergebnisse dieser Betrachtungen fassen wir zusammen: LXIII. Es sei h der höchste Haupttypus, ϱ der von

μ verschiedene höchste Resttypus von μ, so ist $\mu = h + \varrho$, und jeder andere Typus ξ, der der Gleichung $\mu = \xi + \varrho$ genügt, ist höher als h, d.h. der höchste Haupttypus ist zu dem nach μ selbst höchsten Resttypus ϱ der kleinste komplementäre Abschnittstypus, und ϱ enthält keinen höheren Haupttypus wie μ selbst.

§ 72. Es seien jetzt $\varrho_0 \succ \varrho_1 \succ \varrho_2 \ldots \succ \varrho_n$ die Resttypen von μ; h_k sei der höchste Haupttypus von ϱ_k, speziell also h_0 der höchste von $\mu = \varrho_0$ selbst und $h_n = \varrho_n$. Dann ist

$$\varrho_0 = h_0 + \varrho_1, \; \varrho_1 = h_1 + \varrho_2, \ldots \varrho_n = h_n, \text{ also } \mu = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots h_n,$$

und in dieser Reihe ist kein Haupttypus höher als ein vorangehender.

Diese Zerlegung eines beliebigen Typus in eine endliche Reihe nicht steigender Haupttypen ist die Cantorsche Normalform. Da jeder Typus seinem vorangehenden oder folgenden gleich sein kann, läßt sich diese Normalform noch etwas vereinfachen. Es sei etwa $h_{k-1} \succ h_k = h_{k+1} = h_{k+2} = h_{k+r-1} \succ h_{k+r}, \ldots$ und $h_k = \omega^\alpha$, so kann man den Teil $h_k + h_{k+1} + \cdots h_{k+r-1}$ zu $\omega^\alpha . r$ zusammenfassen und findet somit:

LXIV. Jede transfinite Ordnungszahl μ läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Form

$$\mu = \omega^{\alpha_0} . r_0 + \omega^{\alpha_1} . r_1 + \cdots \omega^{\alpha_m} . r_m$$

bringen, worin $\alpha_0 \succ \alpha_1 \succ \ldots \succ \alpha_m$ Ordnungszahlen, r_0, $r_1 \ldots r_m$ und m natürliche (endliche, ganze) Zahlen sind.

Diesen Satz kann man noch durch eine kürzere Betrachtung ableiten, die aber einer Definition durch Induktion[1] bedarf, auf die ich im Allgemeinen verzichtet habe. Sei nämlich ω^{α_0} der höchste Haupttypus h_0 von μ, so ist nach LIII $\mu = h_0 . r_0 + \varrho_0$, worin $\varrho_0 \prec h_0$ und $r_0 \prec \omega$; letzteres, weil $h_0 \prec \mu \prec h_0 \omega$ ist.

Durch den gleichen Schluß findet man weiter $\varrho_0 = h_1 . r_1 + \varrho_1$, $\varrho_1 = h_2 r_2 + \varrho_2$ etc., und hat dann zu zeigen, daß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einem Ende führt, was aus dem Charakter $h_0 \succ h_1 \succ h_2 \ldots$ der Reihe der Haupttypen folgt, in der ein niederstes Element vorhanden sein muß.

§ 73. Wenn man aus irgendwelcher Reihe von Haupttypen, deren Anzahl n endlich sein soll und unter denen beliebig viele gleich sein können, die Summen in den verschiedenen möglichen Reihenfolgen bildet, so ist deren Anzahl endlich, es gibt also einen höchsten Typus, der durch Summation aus ihnen gebildet werden kann. Dieser höchste Typus wird sicher erhalten, wenn die Reihenfolge so gewählt wird, daß kein Typus vor einem höheren steht[2]. Diese Reihenfolge ist eindeutig bestimmt, wenn wir die Vertauschung zweier ähnlicher Typen nicht als Veränderung der Anordnung mitrechnen. Da nämlich die Anzahl der gegebenen Typen endlich ist, findet sich ein höchster, h_0 unter ihnen; es können noch eine gewisse Anzahl ähnlicher Typen vorhanden sein; diese Anzahl sei r_0, ihre Summe ist, unabhängig von der Anordnung, gleich $h_0 . r_0$ und muß zuvorderst gestellt werden, wenn h_0 nicht hinter einen niederen Typus kommen soll. Unter den übrigen Typen sei h_1 der höchste und komme r_1 mal vor. Dann muß $h_1 r_1$ unmittelbar hinter

---

[1] D. h. einer Definition der Typen $h_0, h_1, \ldots$ bei der die Definition eines jeden die des vorangehenden voraussetzt.

[2] Da ein Haupttypus jeden niederen vorangestellten Typus in sich aufnimmt.

$h_0 r_0$ stehen, u. s. f., d. h. die gesuchte Anordnung, in der kein Typus vor einem höheren steht, sieht so aus: $h_0 r_0 + h_1 r_1 + \cdots h_m r_m$. (Die Anzahl n aller gegebenen Typen ist $r_0 + r_1 + \cdots r_m$). Diese Summe nennen wir die natürliche Summe der gegebenen Menge von Typen. Jede andere Anordnung liefert einen gleichgebildeten Ausdruck, in dem aber ein Teil der Coefficienten $r_0, r_1 \ldots r_m$ kleinere Werte hat, weil Typen, die vor höheren Typen stehen, verschwinden. Beispielsweise ist die niederste Summe

$$h_m . r_m + h_{m-1} . r_{m-1} + \cdots h_0 . r_0 = h_0 . r_0,$$

da h_0 alle vorangehenden Typen als Haupttypus in sich aufnimmt.

Die Cantorsche Normalform stellt also einen Typus μ als natürliche Summe einer endlichen Reihe von Haupttypen dar. Daß diese Darstellung nur auf eine Weise möglich ist, ging aus der Herleitung der Cantorschen Normalform zur Genüge hervor, wird sich aber im folgenden nochmals bestätigen, wobei zugleich klar wird, daß jede andere Summe einer Haupttypenreihe niederer ist als die natürliche.

§ 74. Es seien

$$\mu = \omega^{\alpha_0} r_0 + \omega^{\alpha_1} r_1 + \cdots \omega^{\alpha_m} r_m$$
$$\nu = \omega^{\beta_0} s_0 + \omega^{\beta_1} s_1 + \cdots \omega^{\beta_n} s_n$$

zwei Typen in der Cantorschen Normalform. Es soll entschieden werden, welcher von beiden der niedere ist.

Jeder Haupttypus von ν findet sich entweder unter denen von μ vor, oder er steht der Höhe nach zwischen zwei Typen von μ, oder er steht der Höhe nach vor, oder endlich hinter allen. Wir können demnach eine Reihe $h_0 \succ h_1 \succ \ldots \succ h_k$ von Haupttypen nennen, die alle Haupttypen von μ und alle von ν enthält und keine andern. Sind in ν Haupttypen, die nicht in μ vorkommen,

so fügen wir sie zu μ mit dem Faktor 0 hinzu, und umgekehrt, so daß μ, ν eine gemeinsame Darstellung

$$\mu = h_0 . m_0 + h_1 . m_1 + \cdots h_k . m_k$$
$$\nu = h_0 . n_0 + h_1 . n_1 + \cdots h_k . n_k$$

erhalten. Ist beispielsweise $\omega^{\beta_0} \prec \omega^{\alpha_0}$, d. h. $\beta_0 \prec \alpha_0$, so ist $h_0 = \omega^{\alpha_0}$ und $n_0 = 0$, $m_0 = r_0$ etc.

Um nun zu entscheiden, welcher der Typen μ, ν der höhere ist, suchen wir in der Reihe der Koefficienten $m_0, m_1, \ldots m_k$ den ersten, der von dem darunterstehenden der Reihe $n_0, n_1, \ldots n_k$ verschieden ist. Es kann schon m_0 selbst sein, aber ebensogut ein späterer. Wenn alle Koefficienten gleich wären, so wäre ja $\mu = \nu$.

Sei nun m_t dieser erste Koefficient und die Bezeichnung so gewählt, daß $m_t \succ n_t$ ist. Dann ist m_t mindestens gleich $n_t + 1$, also $m_t \succeq n_t + 1$. Da alle vorangehenden gleich sein sollen, wird, wenn $n_0 m_0 + \cdots h_{t-1} m_{t-1} = \alpha$ gesetzt wird,

$$\mu = \alpha + h_t . m_t + \mu'$$
$$\nu = \alpha + h_t . n_t + \nu'$$

und hierin ist gewiß $\nu' \prec h_t$, nach der Definition von h_t. Nun erhalten wir nach LI folgende Reihen von Ungleichungen:
erstens aus:

$$m_t \succeq n_t + 1:$$
$$h_t m_t \succeq h_t (n_t + 1)$$
$$\alpha + h_t m_t \succeq \alpha + h_t n_t + h_t$$
$$\text{(a)} \qquad \alpha + h_t m_t + \mu' \succeq \alpha + h_t n_t + h_t,$$

zweitens aus

$$h_t \succ \nu':$$
$$\text{(b)} \qquad \alpha + h_t n_t + h_t \succ \alpha + h_t n_t + \nu',$$

und aus (a, b) $\mu \succ \nu$. Über die Ordnungsbeziehung der Zahlen μ, ν entscheidet also vollständig das erste

nichtübereinstimmende Koefficientenpaar. Daraus folgt sofort die Eindeutigkeit der Cantorschen Darstellung sowie die Behauptung über die natürliche Summe.

XX.

Die natürliche Summe.

§ 75. Es seien wieder μ, ν zwei Typen in der gemeinsamen Darstellung:

$$\mu = h_0 . m_0 + h_1 . m_1 + \cdots h_k . m_k$$
$$\nu = h_0 . n_0 + h_1 . n_1 + \cdots h_k . n_k$$

Dann definieren wir als die natürliche Summe $\mu \# \nu$ dieser beiden Typen den Typus

$$\mu \# \nu = h_0(m_0 + n_0) + h_1(m_1 + n_1) + \cdots h_k(m_k + n_k).$$

Wenn μ, ν Haupttypen sind, so stimmt diese Definition mit der vorhin für Haupttypen gegebenen überein.

Die natürliche Summe ist aus den Elementen der beiden Typen zusammengesetzt, also nichts anderes als die Vereinigungsmenge in neuer Anordnung. Wir finden daher die Äquivalenz:

LXV. $$\mu + \nu \sim \mu \# \nu.$$

Man erkennt leicht, daß die natürliche Summe kommutativ, daß sie von höherem Typus als jeder der Summanden ist, und daß jeder der beiden Summanden durch den anderen eindeutig bestimmt ist, Eigenschaften, die die Bezeichnung dieser Summe als der „natürlichen" rechtfertigen.

Nun ist folgender Satz von Bedeutung:

LXVI. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Zahlenpaaren, die eine vorgeschriebene natürliche Summe ergeben.

In der Tat, soll $\mu \# \nu = \sigma$ sein, so heißt das für die Cantorschen Normalformen

$$\begin{aligned} \mu &= h_0 m_0 + h_1 m_1 + \cdots h_k m_k \\ \nu &= h_0 n_0 + h_1 n_1 + \cdots h_k n_k \\ \sigma &= h_0 s_0 + h_1 s_1 + \cdots h_k s_k : \end{aligned}$$

Es soll $m_0 + n_0 = s_0$, $m_1 + n_1 = s_1, \ldots m_k + n_k = s_k$ sein. Nun sind die Koefficienten endliche Zahlen. Die erste Gleichung besitzt daher $s_0 + 1$ Lösungen, nämlich

$$0 + s_0,\ 1 + (s_0 - 1),\ 2 + (s_0 - 2),\ \ldots\ s_0 + 0,$$

analog die zweite $s_1 + 1$, die letzte $s_k + 1$. Die Anzahl aller Lösungen ist danach eine endliche Zahl s,

$$s = (s_0 + 1)(s_1 + 1) \ldots (s_k + 1),$$

die wir die Höhe von σ nennen. Hierbei sind noch zwei Lösungen als verschieden gerechnet, wenn sie lediglich durch die Stellung $\mu \# \nu$, $\nu \# \mu$ unterschieden sind. Falls auf diesen Unterschied kein Wert gelegt wird, reduziert sich die Anzahl der Lösungen noch auf $s:2$ oder $(s+1):2$.

§ 76. Nachdem wir eine neue Anordnung der Vereinigungsmenge aufgestellt haben, gehen wir dazu über, auch die Verbindungsmenge neu zu ordnen. Es seien μ, ν die Ordnungstypen zweier wohlgeordneter Mengen M, N; da M und N nach Satz XXX (§ 40) den Mengen aller Ordnungszahlen vor μ und ν ähnlich sind, denken wir sie uns von vornherein durch diese ersetzt. Die Verbindungsmenge $(M.N)$ besteht alsdann (§ 49) aus allen Zahlenpaaren (α, β), worin $\alpha \prec \mu$, $\beta \prec \nu$ ist und die Paare (α, β), (β, α) als verschieden zu gelten haben.

Jedes Zahlenpaar (α, β) hat eine bestimmte natürliche Summe $\gamma = \alpha \# \beta$, und alle Paare von gleicher natürlicher Summe γ

fassen wir zu einer Menge L_γ zusammen. Diese Menge ist nach Satz LXVI des vorigen Paragraphen endlich und kann daher sofort wohlgeordnet werden, etwa durch die Festsetzung, daß $(\alpha_1, \beta_1) \prec (\alpha_2, \beta_2)$ sein soll, wenn $\alpha_1 \prec \alpha_2$ ist.

Die Mengen L_γ ihrerseits bilden die Elemente einer Menge S, und diese ordnen wir nach dem Index γ ihrer Elemente. Da der Index eine Ordnungszahl ist, ist die Ordnung von S eine Wohlordnung. (Satz XXXII, § 40).

Die Verbindungsmenge $(M.N)$ ist nun die Vereinigungmenge aller Mengen L_γ und daher nach den Ausführungen des § 55 durch folgende Festsetzung wohlgeordnet: Es ist $(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta')$, erstens, wenn $\alpha \# \beta \prec \alpha' \# \beta'$, zweitens, wenn $\alpha \# \beta = \alpha' \# \beta'$ und $\alpha \prec \alpha'$ ist. In dieser Wohlordnung bezeichnen wir die Verbindungsmenge mit $M \times N$ und ihren Typus mit $\mu \times \nu$.

§ 77. Es sei σ der Ordnungstypus von S. Wir bringen ihn auf die Form $\omega . \sigma' + \varrho$, worin ϱ eine endliche Zahl, insbesondere die Null ist, falls S kein letztes Element besitzen sollte. (§ 61) Die Menge $M \times N$ entsteht aus S, indem jedes Element L_γ von S durch eine endliche Anzahl von Elementen, nämlich die zu L_γ gehörigen Zahlenpaare (α, β) ersetzt wird. Hierdurch ändert sich nach Satz LV (§ 63) der Typus $\omega . \sigma'$ als Limeszahl überhaupt nicht und ϱ als endlicher Typus höchstens um eine endliche Zahl $\varkappa$, d. h. es ist

(a) $$\mu \times \nu = \sigma + \varkappa, \quad (\varkappa \prec \omega),$$

und da eine endliche Zahl die Mächtigkeit nicht beeinflußt, (Satz XVIII, § 23):

(b) $$\mu \times \nu \sim \sigma.$$

Aus den Ungleichungen

$$\alpha \prec \mu, \; \beta \prec \nu$$

folgt nun, was ohne Mühe zu übersehen ist, die Ungleichung

$$\alpha \# \beta \prec \mu \# \nu.$$

Da somit die Zahlen $\gamma = \alpha \# \beta$, welche die Ordnung der Elemente L_γ von S definieren, alle unterhalb von $\mu \# \nu$ liegen, kann der Ordnungstypus von S nicht höher sein als der aller Zahlen unter $\mu \# \nu$ (Satz XXVII, § 38), d. h. es ist (Satz XXX, § 40):

(c) $$\sigma \leqq \mu \# \nu.$$

Hiernach aber ist σ und wegen (b) auch $\mu \times \nu$ gewiß nicht von höherer Mächtigkeit als $\mu \# \nu$ (§ 41).

Beachtet man jetzt, daß $\mu \times \nu$ eine Ordnung der Verbindungsmenge, $\mu \# \nu$ der Vereinigungsmenge ist und daß daher auch $\mu \# \nu$ nicht höhere Mächtigkeit wie $\mu \times \nu$ besitzen kann, so erkennt man, daß die Vereinigungsmenge und die Verbindungsmenge gleichmächtig sind; d. h. es ist allgemein

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta.$$

Diese Mächtigkeit wird uns aber durch den Typus $\mu \# \nu$ sofort angegeben. Der höchste, in $\mu \# \nu$ auftretende Haupttypus tritt nämlich sicher in dem größeren der beiden Typen μ, ν als höchster Haupttypus auf, was aus dem Bildungsgesetz von $\mu \# \nu$ hervorgeht. Andererseits bestimmt er die Mächtigkeit. Ist daher $\mu \succ \nu$ oder $\mu = \nu$, so ist $\mu \# \nu \sim \mu$, woraus wir auf die Alefs sofort weiter schließen:

LXVII. Ist $\aleph_\alpha$ höher oder gleich $\aleph_\beta$, so ist

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha.$$

Insbesondere ist $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$ für endliches n.

Hiermit ist ein wesentliches Ziel dieser Ausführungen erreicht, nämlich die Durchführung des Beweises zu Satz XL, 4:

Ist M eine Menge von Typen, deren Mächtigkeiten $\aleph_\alpha$ nicht übersteigen, und ist auch M nicht von höherer Mächtigkeit, so gilt das gleiche von dem zugehörigen Limes. Der Beweis ist in § 56 unter Vorwegnahme des Satzes LXVII bereits zu Ende geführt.

Der Satz LXVII ist nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein zuerst von Herrn Georg Cantor bewiesen worden, doch ist eine Veröffentlichung des Cantorschen Beweises bisher nicht erfolgt. In jüngster Zeit hat mir Herr Zermelo einen Beweis mitgeteilt, der von dem hier gegebenen wesentlich verschieden ist und demnächst an anderer Stelle erscheinen wird.

XXI.

Potenzen und ε-Zahlen.

§ 78. Es seien zwei Typen μ, ν in der Cantorschen Normalform gegeben. Gesucht ist ihre Summe $\mu + \nu$, und zwar ebenfalls in der Normalform.

Es sei k der größte Haupttypus in ν, $\nu = k + \varrho$. Ist dann $\mu \prec k$, so folgt $\mu + \nu = \nu$. Findet sich dagegen der Typus k in der Normaldarstellung von μ, so läßt sich μ in zwei Teile $\mu' + \mu''$ zerlegen, so daß $\mu'' \prec k$, $\mu' \succeq k$ wird, und es ist $\mu + \nu = \mu' + \nu$.

Sei insbesondere $\mu = \nu$, so bringen wir μ auf die Form $k . m + \varrho$, worin $\varrho \prec k$ und m wegen $k \prec \mu \prec k\omega$ niederer als ω, d. h. eine endliche Zahl ist. Es wird $\mu + \mu = k . m + \varrho + k . m + \varrho$ und darin ist $\varrho + k . m = k . m$, da k ein Haupttypus, also $\mu + \mu = k . m . 2 + \varrho$. Weiterhin folgt $\mu + \mu + \mu = k . m . 2 + \varrho + k . m + \varrho = k . m . 3 + \varrho$, endlich $\mu + \mu + \cdots \mu = \mu . n = k . mn + \varrho$, falls $n \succ 0$ ist.

Hiermit ist gezeigt, wie ein Typus mit einer endlichen Zahl multipliziert wird. Das Produkt $\mu\omega$ war schon früher berechnet,

und ergab sich als $k\omega$. Damit sind wir in den Stand gesetzt allgemein $\mu \cdot \nu$ zu berechnen. Wir bringen ν auf die Form $\nu = \omega \cdot \nu' + r$, worin $r \prec \omega$, d. h. endlich ist. Nach dem distributiven Gesetz wird $\mu\nu = \mu\omega\nu' + \mu r = k\omega\nu' + \mu r$. Diese Zerlegungen ergeben sich alle unmittelbar aus der Normalform selbst und die Durchführung der Rechnung liefert sogleich die Summen und Produkte wieder in der Normalform. Dies läßt sich auch leicht durch Formeln zum Ausdruck bringen. Sei

$$\mu = \mu_0 m_0 + \mu_1 m_1 + \cdots \mu_\varrho m_\varrho + m$$
$$\nu = \nu_0 n_0 + \nu_1 n_1 + \cdots \nu_\sigma n_\sigma + n.$$

Hierin bedeuten $\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_\varrho$, $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_\varrho$ unendliche Haupttypen, m, n etwa vorhandene vielfache des Haupttypus 1. Fehlen sie, so sind m, n gleich 0 zu setzen.

Ist $\mu_0 \prec \nu_0$, so ist $\mu + \nu = \nu$, ist $\mu_0 \succ \nu_0$, so sei $\mu_{\varkappa-1}$ der niederste Typus über ν_0, $\mu_\varkappa = \nu_0$. Es wird

$$\mu + \nu = \mu_0 m_0 + \cdots \mu_{\varkappa-1} m_{\varkappa-1} + \nu_0 (m_\varkappa + n_0) + \nu_1 n_1 + \cdots + n.$$

Ferner wird

$$\mu\nu = (\mu_0 \nu_0) n_0 + (\mu_0 \nu_1) n_1 \cdots (\mu_0 \nu_\sigma) n_\sigma + \mu \cdot n,$$

und falls $n \succ 0$ ist, entwickelt sich noch das letzte Glied wie folgt:

$$\mu\nu = (\mu_0 \nu_0) n_0 + (\mu_0 \nu_1) n_1 + \cdots (\mu_0 \nu_\sigma) n_\sigma + \mu_0 (m_0 n) + \mu_1 m_1 + \cdots + m.$$

Diese Formel ist für $n = 0$ ungültig. — Da μ_α, ν_β Haupttypen, sind es auch ihre Produkte, und sie bilden eine fallende Reihe, denn aus $\nu_0 \succ \nu_1 \succ \nu_2 \cdots \succ \nu_\sigma$ folgt $\mu_0 \nu_0 \succ \mu_0 \nu_1 \cdots \succ \mu_0 \nu_\sigma$, und aus $\nu_\sigma \succ 1$ folgt $\mu_0 \nu_\sigma \succ \mu_0$. Endlich ist $\mu_0 \succ \mu_1 \cdots \succ 1$ nach Voraussetzung. Das Produkt $\mu\nu$ ist also in der Normalform dargestellt. Man schließt daraus sogleich, daß der höchste

Haupttypus eines Produktes gleich dem Produkt der höchsten Haupttypen der Faktoren ist.

Setzt man insbesondere $\mu = \nu$, so ist der höchste Haupttypus von μ^2 gleich μ_0^2, der von $\mu^2 . \mu = \mu^3$ gleich $\mu_0^2 . \mu_0 = \mu_0^3$, allgemein für jedes endliche n: **Der höchste Haupttypus von μ^n ist gleich μ_0^n.**

§ 79. Die Potenz μ^α ist von Georg Cantor durch eine Induktionsdefinition gebildet worden. Da wir bereits ohne Induktion die Potenzen von ω definiert haben, sind wir in der Lage, auch μ^α ohne Induktion für alle höheren Typen zu definieren [1]. Es sei μ_0 der höchste Haupttypus von μ und $\alpha = \omega\alpha' + a$, $a \prec \omega$, d. h. endlich; $\omega\alpha'$ bezeichnen wir mit β und definieren als α-te Potenz von μ die Zahl

$$(1) \qquad \mu^\alpha = \mu_0^\beta . \mu^a .$$

Der erste Faktor ist Potenz eines Haupttypus $\mu_0 = \omega^m$. Diese definieren wir als $\omega^{m\beta}$ und überzeugen uns sofort von der Identität

$$(2) \qquad \mu_0^\beta . \mu_0^\delta = \mu_0^{\beta+\delta} .$$

Es ist nämlich die linke Seite gleich $\omega^{m\beta} . \omega^{m\delta} = \omega^{m\beta+m\delta}$ und weiter nach dem distributiven Gesetz gleich $\omega^{m(\beta+\delta)}$ oder nach Definition gleich $\mu_0^{\beta+\delta}$.

Der zweite Faktor in (1) hat einen endlichen Exponenten und ist als ein endliches Produkt bereits definiert.

Wir haben nun zu zeigen, daß

$$(3) \qquad \mu^\alpha . \mu^\gamma = \mu^{\alpha+\gamma} .$$

---

[1] Die Definition der unendlichen Potenzen endlicher Typen hat keine Bedeutung.

Zu diesem Zweck zerlegen wir γ in $\omega\gamma' + c = \delta + c$, so wird $\mu^{\gamma} = \mu_0^{\delta} . \mu^c$ und die linke Seite zu $\mu_0^{\beta} . \mu^a . \mu_0^{\delta} . \mu^c$. Das mittlere Produkt $\mu^a . \mu_0^{\delta}$ ist aber gleich $\mu_0^a \mu_0^{\delta}$, weil einerseits μ_0^a der höchste Haupttypus von μ^a ist und andererseits μ_0^{δ} als Haupttypus keinen endlichen Rest besitzt. Nach (2) wird damit

$$\mu^{\alpha} . \mu^{\gamma} = \mu_0^{\beta+a+\delta} . \mu^c = \mu_0^{\alpha+\delta} . \mu^c .$$

Andererseits wird $\alpha + \gamma = \alpha + \delta + c$, wobei c der endliche Rest von $\alpha + \gamma$ ist, also $\mu^{\alpha+\gamma} = \mu^{\alpha+\delta} . \mu^c$, womit (3) bewiesen ist. Zugleich ergiebt sich, daß auch für transfinite Potenzen stets μ_0^{α} der höchste Haupttypus von μ^{α} ist.

Von weiteren Eigenschaften der Potenz ergiebt sich jetzt

$$(4) \qquad (\mu^{\alpha})^{\beta} = \mu^{\alpha\beta}$$

sofort für die endlichen β aus (3). Ist β transfinit, so sei b sein größter endlicher Rest und $\beta = \gamma + b$, Dann ist nach (1):

$$(\mu^{\alpha})^{\beta} = (\mu_0^{\alpha})^{\gamma} . (\mu^{\alpha})^{b} .$$

Hierin ist μ_0 ein Haupttypus ω^m, nach Definition daher $\mu_0^{\alpha} = \omega^{m\alpha}$ und $(\mu_0^{\alpha})^{\gamma} = (\omega^{m\alpha})^{\gamma} = \omega^{m\alpha\gamma} = \mu_0^{\alpha\gamma}$. Für den zweiten Faktor ist $(\mu^{\alpha})^{b} = \mu^{\alpha b}$ bewiesen. Somit folgt weiter

$$(\mu^{\alpha})^{\beta} = \mu_0^{\alpha\gamma} \mu^{\alpha b} .$$

Von diesem Ausdruck ist zu zeigen, daß er gleich $\mu^{\alpha\beta}$ ist. Nun ist $\alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha b$, also $\mu^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha\gamma} . \mu^{\alpha b}$. Da $\alpha\gamma$ keinen endlichen Rest hat, weil γ keinen besitzt, ist $\mu^{\alpha\gamma} = \mu_0^{\alpha\gamma}$, womit der Beweis für (4) erbracht ist.

§ 80. Durch Multiplikation zweier Typen gelangt man nicht zu höheren Mächtigkeiten. Es fragt sich nun, ob die Potenz α^{β} vielleicht eine höhere Mächtigkeit als α und β zugleich besitzen

kann. Diese Frage muß verneint werden. Dem Beweis (§ 84) schicken wir eine längere Betrachtung voraus.

LXVIII. **Ist M eine Menge von Typen λ, μ ihr Limes, und α ein bestimmter Typus, so ist:**

$$\text{a) } \lim(\alpha+\lambda) = \alpha+\mu$$

$$\text{b) } \lim(\mu\lambda) = \alpha\mu$$

$$\text{c) } \lim \alpha^{\lambda} = \alpha^{\mu}.$$

Am leichtesten ist der erste zu beweisen. Ist $\alpha \prec \nu \prec \alpha+\mu$, so ist $\nu = \alpha+\nu'$ und $\nu' \prec \mu$ also niederer als ein λ, danach $\nu \prec \alpha+\lambda$. Zugleich ist wegen $\mu \succ \lambda$ auch $\alpha+\mu \succ \alpha+\lambda$, also ist $\alpha+\mu$ unter allen Typen über $\alpha+\lambda$ der erste.

Der Beweis des zweiten Satzes wird am kürzesten nach LIII geführt. Jeder Abschnitt von $\alpha\mu$ hat die Form $\alpha\mu'+\alpha'$, $\mu' \prec \mu$, $\alpha' \prec \alpha$. Da $\mu' \prec \mu$, existiert in M ein $\lambda' \succ \mu'$. Da es in M kein letztes Element geben soll, giebt es weiter ein Element $\lambda \succ \lambda'+1$ in M, und nunmehr folgt: $\alpha\mu' \prec \alpha\lambda'$, $\alpha\mu'+\alpha' \prec \alpha\lambda'+\alpha' \prec \alpha\lambda'+\alpha$ $= \alpha(\lambda'+1) \prec \alpha\lambda$. Zu jedem Abschnitt von $\alpha\mu$ gibt es daher unter den Zahlen $\alpha\lambda$ eine höhere. Da andererseits nach $\mu \succ \lambda$ auch $\alpha\mu \succ \alpha\lambda$ ist, ist $\alpha\mu$ unter allen Typen über $\alpha\lambda$ der niederste.

Hierbei ist wesentlich, was für a) nicht in Betracht kommt, daß in M wirklich kein höchstes Element existiert. In der Tat, bestände z. B. M aus allen Typen $\lambda \prec 7$, so wäre $\mu = 7$, gleichzeitig aber das auf die Typen 3λ folgende Element nicht $3.7 = 21$ sondern 19. Das gleiche kommt im nächsten Beweis zur Geltung.

Um c) zu beweisen, beachten wir zunächst, daß μ als Limeszahl keinen endlichen Rest hat. Ist daher $\alpha_0 = \omega^{\beta}$ der höchste Haupttypus in α, so ist $\alpha^{\mu} = \alpha_0^{\mu} = \omega^{\beta\mu}$. Dies ist zugleich die Cantorsche Normalform von α^{μ}. Jeder Typus ξ unter α^{μ} hat also

einen höchsten Haupttypus ω^γ unter $\omega^{\beta\mu}$, d. h. es ist $\gamma \prec \beta\mu$; Da weiter $\beta\mu$ kein letztes Element hat, ist auch $\gamma + 1 \prec \beta\mu$, also $\gamma + 1 = \beta\mu' + \beta'$, $\mu' \prec \mu$, $\beta' \prec \beta$. Nach dem vorigen Beweis gibt es daher ein λ in M, für das $\gamma + 1 \prec \beta\lambda$, somit $\omega^{\gamma+1} \prec \omega^{\beta\lambda}$, i. e. $\omega^{\gamma+1} \prec \alpha_0^\lambda$ wird. Nun ist ω^γ der größte Haupttypus in ξ, also $\xi \prec \omega^{\gamma+1}$, andererseits α_0^λ der höchste Haupttypus in α^λ, also $\alpha_0^\lambda \leqq \alpha^\lambda$; daraus folgt $\xi \prec \alpha^\lambda$. Da andererseits aus $\lambda \prec \mu$ auch $\alpha^\lambda \prec \alpha^\mu$ folgt, ist α^μ unter allen Typen über α^λ der erste, w. z. b. w. —

§ 81. Im Gegensatz zu LXVIII muß hervorgehoben werden, daß in keinem der Ausdrücke $\lim(\lambda + \alpha)$, $\lim(\lambda . \alpha)$, $\lim(\lambda^\alpha)$ das hintere Zeichen, α, aus dem Limes heraustreten darf. Drei elementare Beispiele mögen dies erweisen:

Es ist für alle endlichen n $\lim(n) = \omega$. Da auch $n + 2$, $n . 2$ und n^2 endlich sind und unbegrenzt wachsen, ist somit

$$\begin{aligned} \lim(n+2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n+2) \prec \omega + 2 \\ \lim(n.2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n.2) \prec \omega.2 \\ \lim(n^2) &= \omega, \text{ d. h. } \lim(n^2) \prec \omega^2 \end{aligned}$$

Die Beweise zu den drei Sätzen machen in der Tat von den Ungleichungen $\alpha + \lambda \succ \alpha$, $\alpha\lambda \succ \lambda$, $\alpha^\lambda \succ \alpha$ Gebrauch, während für die umgekehrten Operationen die weiteren Beziehungen $\alpha + \lambda \geqq \lambda$, $\alpha\lambda \geqq \lambda$, $\alpha^\lambda \geqq \lambda$ gelten, auf Grund deren der Beweis nicht zu führen ist. Nun ist es interessant, zu sehen, daß die Gültigkeit gerade dieser weiteren Beziehungen eine notwendige Bedingung für die Beweisbarkeit der drei Sätze LXVIII darstellt, so daß umgekehrt die erste Reihe der reinen Ungleichungen das Herausziehen des hinteren Gliedes aus dem Limes unmöglich macht. Es sei nämlich φ eine Zuordnung, die jeder Zahl λ eine nicht niedere $\varphi(\lambda)$

zuordnet. Ist dann stets $\varphi(\lambda) \succ \lambda$, so kann nicht $\lim \varphi(\lambda) = \varphi(\lim \lambda)$ für jede Menge M von Typen λ allgemein gelten. Und ist umgekehrt allgemein $\varphi(\lim \lambda) = \lim \varphi(\lambda)$, so gibt es Typen ν, für die $\varphi(\nu) = \nu$ ist. Zum Beweise bilden wir folgende Reihe von Typen aus einer beliebigen Zahl λ_0:

$$\varphi(\lambda_0) = \lambda_1, \quad \varphi(\lambda_1) = \lambda_2, \ldots \quad \varphi(\lambda_n) = \lambda_{n+1}, \ldots$$

und zu dieser den Limes $\beta = \lim\limits_{\varkappa} (\lambda_\varkappa)$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$. Da $\lambda_\varkappa = \varphi(\lambda_{\varkappa-1})$, ist auch $\beta = \lim\limits_{\varkappa} (\varphi(\lambda_\varkappa))$ und wenn φ mit dem Limeszeichen vertauschbar ist, $\beta = \varphi(\lim\limits_{\varkappa} \lambda_\varkappa) = \varphi(\beta)$.

Aus den drei Sätzen LXVIII folgt daher für die drei Operationen $\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda$, $\alpha . \lambda$, α^λ sofort, daß es Typen geben muß, die ihnen gegenüber invariant sind, d. h. daß $\alpha + \lambda$, $\alpha . \lambda$, α^λ nicht allgemein höher sein können wie λ; und da umgekehrt $\lambda + \alpha$, $\lambda . \alpha$, λ^α stets größer wie λ sind, kann nicht allgemein $\lim (\lambda + \alpha)$, $\lim (\lambda . \alpha)$, $\lim (\lambda^\alpha)$ mit $\mu + \alpha$, $\mu . \alpha$, μ^α, $(\mu = \lim \lambda)$ übereinstimmen. —

Wenden wir dies auf einige einfachen Fälle an und setzen zunächst $\varphi(\lambda) = \alpha + \lambda$, so ist für $\lambda_0 = 0$:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha . 2, \quad \lambda_3 = \alpha . 3, \ldots \quad \lambda_\varkappa = \alpha . \varkappa,$$

und der Limes gleich $\alpha . \omega$ nach b). In der Tat ist $\varphi(\alpha\omega) = \alpha\omega$, nämlich $\alpha + \alpha\omega = \alpha(1 + \omega) = \alpha . \omega$.

Sei weiter $\varphi(\lambda) = \alpha . \lambda$, $\lambda_0 = 1$, so wird:

$$\lambda_1 = \alpha, \; \lambda_2 = \alpha^2, \ldots \lambda_\varkappa = \alpha^\varkappa, \; \lim \lambda_\varkappa = \alpha^\omega \text{ und } \alpha . \alpha^\omega = \alpha^{1+\omega} = \alpha^\omega$$

wie behauptet war.

Sei endlich $\varphi(\lambda) = \alpha^\lambda$, $\lambda_0 = 1$, so wird

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha^\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha^{\alpha^\alpha};$$

der Limes β läßt sich nicht mehr durch Addition, Multiplikation und Potenzenbildung angeben. Er genügt aber als

$$\lim \lambda_\varkappa = \lim (\alpha^{\lambda_{\varkappa-1}}) = \alpha^{\lim \lambda_\varkappa}$$

der Gleichung $\beta = \alpha^\beta$. —

Umgekehrt können wir nach diesem Prozeß Beispiele herstellen, für die die umgekehrte Limeseigenschaft nicht erfüllt ist. Setzen wir $\varphi(\lambda) = \lambda + \alpha$, $\lambda_0 = 0$, so wird $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \alpha . 2$, etc., $\lambda_\varkappa = \alpha . \varkappa$, $\lim \lambda_\varkappa = \alpha . \omega$ und es ist $\lim (\lambda_\varkappa + \alpha) = \lim (\lambda_\varkappa)$, also nicht gleich $(\lim \lambda_\varkappa) + \alpha$. Sei analog $\varphi(\lambda) = \lambda . \alpha$, so wird für $\lambda_0 = 1 : \lambda_\varkappa = \alpha^\varkappa$, $\lim \lambda_\varkappa = \alpha^\omega$, $\lim (\lambda_\varkappa . \alpha) = \lim \lambda_\varkappa$ und von $(\lim \lambda_\varkappa) . \alpha$ verschieden. Ist endlich $\varphi(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda_0 = \omega$, so wird $\lambda_1 = \omega^\alpha$, $\lambda_2 = (\omega^\alpha)^\alpha = \omega^{\alpha^2}$, $\lambda_3 = \omega^{\alpha^3}$ etc. Es ist $\lim (\lambda_\varkappa^\alpha) = \lim \lambda_\varkappa = \omega^{\alpha^\omega} \prec (\lim \lambda_\varkappa)^\alpha$.

Nach dieser Methode sind die drei eingangs angeführten Beispiele hergestellt.

§ 82. Wir betrachten nun die Zahlen näher, für die $\alpha + \lambda = \lambda$, oder $\alpha \lambda = \lambda$ oder $\alpha^\lambda = \lambda$ wird. In allen drei Fällen ist $\alpha \prec \lambda$, weil $\alpha + \lambda$, $\alpha \lambda$ und α^λ höher als α ist.

Unter den Zahlen, für die $\alpha + \lambda = \lambda$ ist, sind die Haupttypen bemerkenswert, da sie dieser Gleichung für jedes $\alpha \prec \lambda$ genügen. Ist andererseits λ kein Haupttypus, so ist α ein Abschnitt des höchsten Haupttypus von λ, so daß die ganze Betrachtung sich auch ausschließlich auf die Haupttyen zurückführen läßt.

Es sei jetzt λ eine Zahl, die der Gleichung $\alpha \lambda = \lambda$ genügt; dann kann λ kein letztes Element besitzen. Denn wäre $\lambda = \mu + 1$, so folgte $\alpha \mu + \alpha = \mu + 1$ im Widerspruch mit der für jeden Typus über 1 geltenden Ungleichung $\alpha \succ 1$. Da nämlich $\alpha \mu \succcurlyeq \mu$, folgt $\alpha \mu + \alpha \succcurlyeq \mu + \alpha$ und aus $\alpha \succ 1 : \mu + \alpha \succ \mu + 1$. Der Fall $\alpha = 1$ scheidet natürlich aus.

Da λ kein letztes Element besitzt, ist $\alpha \lambda = \alpha_0 \lambda$, wo α_0 der höchste Haupttypus von α ist. Aus $\alpha_0 \lambda = \lambda$ folgert man aber sofort, daß alle Haupttypen $\omega^\varkappa$ in der Cantorschen Normaldar-

stellung von λ die Eigenschaft $\alpha\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$ besitzen müssen. Ist speziell $\omega^{\varkappa}$ der niederste von ihnen und genügt er dieser Bedingung, so genügen ihr auch alle folgenden, da $\lambda = \omega^{\varkappa}.\lambda'$ wird. Hiermit ist wiederum die Frage auf Haupttypen zurückgeführt und erledigt sich damit sofort. Ist nämlich $\alpha_0 = \omega^{\beta}$, so folgt aus $\alpha_0\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$ sogleich $\beta + \varkappa = \varkappa$, womit wir bei der ersten Frage angelangt sind. Ist speziell $\varkappa$ ein Haupttypus, so ist für jedes $\beta \prec \varkappa$ $\omega^{\beta}\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$, somit für jedes $\alpha \prec \omega^{\varkappa}$ auch $\alpha\omega^{\varkappa} = \omega^{\varkappa}$. Solche Zahlen δ, die für jedes unter ihnen gelegene α mit $\alpha\delta$ übereinstimmen, wollen wir δ-Zahlen nennen. Sie haben keine besondere Bedeutung, doch brauchen wir sie wiederholt in der folgenden Betrachtung und benutzen daher die abkürzende Bezeichnung.

LXIX. Eine Delta-Zahl δ ist ein Haupttypus $\omega^{\varkappa}$, dessen Exponent $\varkappa$ selbst ein Haupttypus ist. Sie genügt den Gleichungen $\alpha + \delta = \alpha\delta = \delta$ für jedes $\alpha \prec \delta$.

Die einzige endliche δ-Zahl ist 1; die nächstfolgenden sind ω, ω^{ω}, ω^{ω^2} u. s. f. — Zu jeder Zahl α, die keine δ-Zahl ist, gibt es eine letzte vorhergehende und eine erste nächstfolgende. Ist ω^{β} der höchste Haupttypus in α, so ist $\alpha^{\beta\varphi}$ die nächstfolgende δ-Zahl nach α. Ist β_0 der höchste Haupttypus in β, so ist ω^{β_0} die letzte δ-Zahl vor α. Speziell ist $\omega^{\beta\omega} = \alpha^{\omega} = (\omega^{\beta_0})^{\omega}$, in Analogie zu dem nächsten Haupttypus $\alpha.\omega$ nach α.

Die Reihe der δ-Zahlen ergibt sich auch leicht durch folgendes Erzeugungsprinzip:

LXX. Ist δ eine δ-Zahl, so ist δ^{ω} die nächstfolgende. Der Limes einer Menge von δ-Zahlen ist selbst eine δ-Zahl.

Die erste Behauptung ergibt sich aus der vorangehenden Betrachtung. Zum Beweis der zweiten beachten wir, daß alle δ-Zahlen

die Form ω^{ω^λ} haben. Da nun der Limes einer Reihe von Haupttypen ω^λ ein Haupttypus ω^μ ist, ist $\lim \omega^{\omega^\lambda} = \omega^{\lim \omega^\lambda} = \omega^{\omega^\mu}$ wieder eine δ-Zahl; dieser Beweis macht von dem Satz LXVIIIc Gebrauch.

§ 83. Nunmehr betrachten wir diejenigen Zahlen, die einer Gleichung $\alpha^\lambda = \lambda$ genügen. Besäße λ ein letztes Element, so wäre $\lambda = \mu + 1$, $\alpha^\mu . \alpha = \mu + 1$. Nun ist $\alpha^\mu \geqq \mu$, $\mu \alpha \succ \mu + 1$ (wenn von $\alpha = 1$, wie selbstverständlich, abgesehen wird), woraus die Unmöglichkeit der letzten Gleichung und damit eines letzten Elementes in λ folgt. Es ist somit α^λ, d. h. λ selbst ein Haupttypus, speziell $\alpha^\lambda = \alpha_0^\lambda$, wenn α_0 der höchste Haupttypus in α ist. Es sei nun $\alpha_0 = \omega^\varkappa$, so folgt $\alpha^\lambda = \omega^{\varkappa\lambda}$ und da $\omega^{\varkappa\lambda} \geqq \varkappa\lambda \geqq \lambda$ sein muß, andererseits $\omega^{\varkappa\lambda} = \lambda$ ist, ergibt sich $\varkappa\lambda = \lambda$, d. h. $\lambda = \omega^\lambda$. Diese Gleichung ist die ursprüngliche Definition Georg Cantors. Er nennt die Zahlen, die ihr genügen, Epsilon-Zahlen. Eine ε-Zahl λ ist ein Haupttypus, und da sie gleich ω^λ ist, eine δ-Zahl. Daraus folgt aber sofort, daß für jedes $\alpha \prec \lambda$ stets $\alpha^\lambda = \lambda$ wird. Denn ist $\omega^\varkappa$ der kleinste Haupttypus in α, so ist $\varkappa \prec \lambda$, daher $\varkappa\lambda = \lambda$, womit $\alpha^\lambda = \omega^{\varkappa\lambda} = \omega^\lambda = \lambda$ folgt.

Es fragt sich nun, wie man von irgend einer Zahl α zu der nächst höheren ε-Zahl gelangt. Diese heiße λ, so ist gewiß $\alpha^\lambda = \lambda$, daher $\alpha^\alpha = \alpha_1 \prec \lambda$. Daher ist weiter $\alpha^{\alpha_1} = \alpha_2 \prec \lambda$, $\alpha^{\alpha_2} = \alpha_3 \prec \lambda$ u. s. f. Der Limes der Zahlen

$$\alpha_1 = \alpha^\alpha, \quad \alpha_2 = \alpha^{\alpha_1}, \quad \alpha_3 = \alpha^{\alpha_2}, \ldots \quad \alpha_\varkappa = \alpha^{\alpha_{\varkappa-1}}$$

ist aber eine ε-Zahl, und da alle $\alpha_\varkappa \prec \lambda$ sind, ist dieser Limes gleich λ selbst, $\lim \alpha_\varkappa = \lim \alpha^{\alpha_\varkappa} = \lambda = \alpha^\lambda$. Auf diese Weise steigt man zunächst etwa von ω über $\omega^\omega = \omega_1$, $\omega^{\omega_1} = \omega_2$, etc. zu der ersten transfiniten ε-Zahl ε_1 auf, von dieser zu ε_2, ε_3 u. s. f.

Ist irgend eine Menge von ε-Zahlen ohne letztes Element definiert, z. B. die eben genannte, so erhält man eine neue ε-Zahl nach dem Satz:

LXXI. Der Limes μ einer Menge M von ε-Zahlen λ ist selbst eine ε-Zahl.

Es ist nämlich $\lambda = \omega^\lambda$, daher $\mu = \lim \lambda = \lim \omega^\lambda = \omega^\mu$, w. z. b. w.

Die charakteristische Eigenschaft der ε-Zahlen liegt in folgendem Satz, der aus der Definition des Exponenten λ eines Haupttypus ω^λ sofort folgt: Die Menge aller Typen unterhalb einer ε-Zahl λ ist ähnlich der Menge aller Haupttypen unter λ, übrigens auch ähnlich der Menge aller Deltazahlen unter λ.

Hieraus folgern wir sogleich den Satz:

LXXII. Jede Anfangszahl ist eine Epsilonzahl.

Jede Anfangszahl Ω_α ist nach § 66 ein Haupttypus, daher gleich ω^μ, wobei μ der Typus der Menge M aller Haupttypen $h \prec \Omega_\alpha$ ist. Wäre nun $\mu \prec \Omega_\alpha$, so wäre es auch von geringerer Mächtigkeit als Ω_α. Ist zunächst α keine Limeszahl, $\alpha = \beta + 1$, so überstiege weder M noch eines seiner Elemente h die Mächtigkeit $\aleph_\beta$, daher nach Satz XL 4 auch der Limes von M nicht; dieser ist aber Ω_α, womit ein Widerspruch entsteht. Damit ist der Satz für alle Mächtigkeiten bewiesen, deren Index keine Limeszahl ist.

Wäre α eine Limeszahl, μ von der Mächtigkeit $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, so wäre auch $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$. Nun ist nach dem eben bewiesenen $\Omega_{\beta+1}$ gleich seinem Exponenten ν in $\Omega_{\beta+1} = \omega^\nu$, weil $\beta + 1$ keine Limeszahl ist, und es ist $\mu \prec \nu$, weil $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$. Dies ergibt den Widerspruch $\omega^\mu \prec \omega^\nu$, d. h. $\Omega_\alpha \prec \Omega_{\beta+1}$. —

Man kann den Fall einer Limesmächtigkeit auch nach LXXI erledigen: Sei Ω_α die niederste Anfangszahl, für die μ in $\Omega_\alpha = \omega^\mu$ niederer als Ω_α ist. Ω_α ist aber als Limes aller vorangehenden

Anfangszahlen (XL 2) nach LXXI selbst eine Epsilonzahl, im Widerspruch mit der Annahme.

§ 84. Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt nun sofort, daß die Mächtigkeit von α^β mindestens einer der beiden Zahlen α, β selbst zukommt. Sei nämlich $\alpha^\beta = \mu$ von höherer Mächtigkeit als α und β, und sei ν die zur Mächtigkeit von μ gehörige Anfangszahl, so ist $\alpha \prec \nu$, also $\nu = \alpha^\nu$ nach LXXII. Da ferner $\beta \prec \nu$, folgt $\alpha^\beta \prec \alpha^\nu$, d. h. $\mu \prec \nu$, gegen die Definition von ν, nach der $\mu \succeq \nu$ sein muß. Also kann α^β nicht von höherer Mächtigkeit als α und β sein.

Die Haupttypen, Delta- und Epsilonzahlen stehen in engster Beziehung mit den Fragen nach den Mächtigkeiten von $\alpha + \beta$, $\alpha . \beta$ und α^β. Genau, wie wir eben bewiesen, daß α^β nicht mächtiger als α und β zugleich sein kann, kann man aus der Tatsache, daß jede Anfangszahl ein Haupttypus resp. eine Deltazahl ist, das analoge für $\alpha + \beta$ und $\alpha . \beta$ beweisen. Wenn es daher gelänge, diese drei Eigenschaften der Anfangszahlen ohne die Kenntnis der Eigenschaften der Alefsumme und des Alefproduktes nachzuweisen, so wäre damit eine wesentliche Vereinfachung für die Mengenlehre gewonnen. —

§ 85. Die eigentümliche Eigenschaft der Epsilonzahlen läßt sich dahin aussprechen, daß die Reihe der Exponenten der Haupttypen $\omega^\varkappa$ die Reihe dieser Haupttypen selbst immer wieder „einholt". Es ist $\omega^1 \succ 1$, $\omega^2 \succ 2$, $\omega^\omega \succ \omega$ u. s. f., aber für ε_1 wird $\omega^{\varepsilon_1} = \varepsilon_1$; sodann wird wieder $\omega^{\varepsilon_1 + 1} \succ \varepsilon_1 + 1$ und diese Ungleichung bleibt bestehen, bis $\omega^{\varepsilon_2} = \varepsilon_2$ wird und so fort.

Daß dieses Verhältnis typisch ist und bei zahlreichen Betrachtungen wiederkehrt, habe ich in § 81 gezeigt. Natürlich kann

man durch Fortsetzung des Gedankens wieder ε-Zahlen ε_α finden, die ihren eigenen Indices gleich sind; man bilde nur $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{\varepsilon_1}$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{\varepsilon^{(2)}}$ u. s. f. und darüber den Limes.

Es ist von prinzipieller Bedeutung, daß es auch Anfangszahlen gibt, die ihren Indices gleich sind. Sei $\omega_1 = \Omega_\omega$, $\omega_2 = \Omega_{\omega_1}$, $\omega_3 = \Omega_{\omega_2}$ u. s. f. und $\Omega_\mu = \lim \omega_\varkappa$, so ist auch $\mu = \Omega_\mu$. Dies bedeutet, daß die Reihe der Alefs selbst von der ihrer Indices eingeholt wird; es ist $\aleph_\mu$ nicht nur die Mächtigkeit der Menge aller Ω_μ vorangehenden Typen überhaupt, sondern auch die der Menge aller vorangehenden Anfangszahlen, d. h. der Menge aller niederen Mächtigkeiten. Diese Eigenschaft kommt zunächst allen endlichen Mächtigkeiten zu, wenn man 0 als Mächtigkeit mitzählt, sodann $\aleph_0$, aber nicht mehr $\aleph_1$, $\aleph_2, \ldots \aleph_\omega \ldots$ Sie stellt sich jedoch bei gewissen Alefs, wie wir sehen, wieder ein. Die Kenntnis dieser Tatsache verdanke ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn Zermelo. Nennt man eine Anfangszahl, die ihrem Index gleich ist, eine ζ-Zahl, ($\Omega_\zeta = \zeta$), so gelten wieder die entsprechenden Bildungsgesetze, wie für die ε-Zahlen. Man bilde aus α successive $\Omega_\alpha = \alpha_1$, $\Omega_{\alpha_1} = \alpha_2$, $\Omega_{\alpha_2} = \alpha_3$ etc. und den Limes $\lim \alpha_\varkappa = \lim \Omega_{\alpha_\varkappa}$ so erhält man die auf α folgende erste ζ-Zahl. Der Limes einer Reihe von ζ-Zahlen ist selbst eine ζ-Zahl.

Fünfter Teil.

Prinzipielle Fragen. Erste Reihe[1].

XXII.

Logische Vollständigkeit und Entscheidbarkeit.

§ 86. Wenn eine Disjunktion logisch vollständig ist, so läßt sie sich vielfach, wenn nicht immer, als Teilung einer Menge in zwei komplementäre Teilmengen darstellen. Beispielsweise ist jede ganze Zahl entweder zerlegbar oder eine Primzahl, d. h. die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen zerfällt in die komplementären Teilmengen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ... und 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22.... Das Kontinuum zerfällt in die Mengen der algebraischen und transzendenten Zahlen, d. h. jede reelle Zahl ist entweder algebraisch oder transzendent. Bei unseren vorangehenden Betrachtungen ist von der logisch vollständigen Disjunktion in umfangreichstem Maße Gebrauch gemacht worden. Mit ihrer Hülfe haben wir Sätze über beliebige Alefs und Ordnungstypen bewiesen, von denen uns eine wirkliche Anschauung beim Beweise selbst sicher fehlte und wohl auch jetzt noch fehlt. In diesem Gebrauch der Disjunktion liegt aber, so zwingend sie sein mag, eine Schwäche der Mengenlehre, die vielleicht Ursache gewisser unerledigter Paradoxieen ist; jedenfalls gibt sie zu Bedenken Anlaß, die zuerst von Kronecker mit aller Schärfe aus-

[1] Die Fragen dieser ersten Reihe gelten denjenigen Postulaten und Begriffsbildungen, deren Zulässigkeit zur Zeit unentschieden, anfechtbar oder abzulehnen ist.

gesprochen, zugleich aber in einem Umfang formuliert worden sind, der ungerechtfertigt war.

Den Kernpunkt der Kroneckerschen Bedenken wollen wir uns an den beiden Disjunktionen prim-zerlegbar und algebraisch-transzendent klar machen. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl a, beispielsweise 257, eine Primzahl ist, habe ich a durch alle Primzahlen zu dividieren, deren Quadrate unter a liegen. Geht keine dieser Divisionen auf, so ist a eine Primzahl; andernfalls ist a offenbar zerlegt. Es ist also nicht nur gewiß, daß jede ganze Zahl prim oder zerlegbar ist, sondern ich kann auch die Entscheidung in jedem Falle treffen. Das gleiche gilt von der Disjunktion zwischen reduzibeln und irreduzibeln algebraischen Gleichungen.

Es wird zumeist betont, daß die Entscheidung durch eine endliche Anzahl von Operationen getroffen wird. Dies ist aber a priori klar und liegt in der Natur unseres Verstandes begründet. Scheinbar unendliche Schlußketten, wie sie beim Schlusse von n auf $n+1$ unterlaufen, sind durch ein gewisses Gesetz beschrieben, auf Grund dessen geschlossen wird, ohne daß jeder einzelne Schluß der Kette wirklich ausgeführt wird. Der Denkprozeß, der bei dem Treffen einer Entscheidung zu stande kommt, ist eo ipso endlich.

So entscheiden wir die Transzendenz von e und π nicht etwa dadurch, daß wir von jeder algebraischen Gleichung der Reihe nach beweisen, daß ihr weder e noch π genügt. Ebensowenig beweisen wir die Übereinstimmung der beiden Limites

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

indem wir der Reihe nach jede Stelle der Dezimalentwicklung 2,718281 ... aus beiden ausrechnen und uns überzeugen, daß sie

gleich ausfällt. Mit solchem Verfahren würden wir zu keinem Ende kommen. Und hier sehen wir den fundamentalen Unterschied zwischen der Disjunktion algebraisch-transzendent und der soeben behandelten: Wenn a zerlegbar sein soll, so kommt nur eine endliche Anzahl von möglichen Zerlegungen in Betracht und ich kann sie systematisch durchprobieren. Wenn aber a algebraisch ist, so kommen unendlich viele algebraische Gleichungen in Betracht, denen a genügen kann und ich kann daher durch Probieren keine Entscheidung treffen. Es gibt heute in der Tat kein allgemeines Kriterium, um die Transzendenz einer gegebenen Irrationalität zu entscheiden, und nach meiner Ansicht läßt es sich auch beweisen, daß es ein solches Kriterium nicht geben kann. Die Definition der Transzendenz: „a genügt keiner algebraischen Gleichung“ ist kein Kriterium, sie enthält keine Methode, die Entscheidung zu treffen.

Solche Definitionen, die keine Kriterien enthalten, sind in der Mathematik vielfach anzutreffen. Hierher rechnet u. a. die Definition der Konvergenz und die der Gleichheit zweier verschieden definierten Irrationalzahlen.

§ 87. Wenn wir aus dem Axiomsystem der euklidischen Geometrie das Parallelenpostulat weglassen, so sind wir nicht im Stande, den Satz von der Winkelsumme im Dreieck zu beweisen. Wir können nur zeigen, daß sie zwei Rechte nicht übersteigt und kleiner als zwei Rechte ist, sofern das nur in einem einzigen Dreieck zutrifft. Trotzdem ist die Disjunktion nach wie vor logisch einwandfrei und vollständig, daß in einem gegebenen Dreieck die Winkelsumme entweder gleich zwei Rechten oder kleiner und nur eins von beiden ist.

Es gibt eine große Zahl von Sätzen, die sich ohne Verwen-

dung des Parallelenpostulats beweisen lassen. Es gibt also einen Teil der Geometrie, der dieses Postulates nicht bedarf; es könnte möglicherweise die Existenz und Notwendigkeit dieses Postulates unentdeckt bleiben und solange dies der Fall wäre, müßte notwendigerweise die Disjunktion zwischen Dreiecken von kleinerer als gestreckter und solchen von gestreckter Winkelsumme mathematisch unfruchtbar bleiben; sie würde nur Sätze hypothetischen Charakters liefern.

Das soeben ausgeführte Beispiel ist trivial, weil zu deutlich. Doch können wir ein anderes anführen, das bis in die jüngste Zeit die Mathematiker aufs intensivste beschäftigt hat: es ist dies der projektive Fundamentalsatz. In ihm konzentrierte sich folgendes Problem: Es sollen alle diejenigen geometrischen Sätze, in denen von Beziehungen des Maßes (Ähnlichkeit, Kongruenz, Strecken- und Winkelvergleichung etc.) nicht die Rede ist, ohne Verwendung der Axiome des Messens bewiesen werden. Gegen alle Versuche, diese Aufgabe zu lösen, wurden ein halbes Jahrhundert lang immer wieder erfolgreiche Einwände erhoben, bis es gelang, die Undurchführbarkeit des Unternehmens in einem genau umschriebenen Sinn, nämlich ohne Maaß- und Stetigkeitspostulate, zu beweisen. Hier haben wir direkt einen Fall vor uns, in dem eine logisch vollständige Disjunktion mathematisch unentscheidbar bleiben mußte, weil in dem System der Theorie ein Axiom fehlte.

Der Nachweis, daß unsere arithmetischen Axiome vollständig sind, ist bis heute nicht erbracht, und daher rührt die Frage (wohl das jüngste Schmerzenskind der kritischen Mathematik), ob jede mathematische Aufgabe eine Lösung besitze, wobei als Lösung auch der Unlösbarkeitsnachweis zu gelten hat, wie bei der Quadratur des Kreises. Die Frage ist alt; z. B. wurde schon

vor Jahren am Beispiel des großen Fermatschen Satzes gefragt: Ist er richtig, muß er sich dann auch beweisen lassen?

Es wird folgendes ziemlich allgemein als wahrscheinlich angesehen: Wenn a, b zwei algebraische Zahlen sind und b insbesondere irrational ist, so ist a^b eine transzendente Zahl. Beispiel: $2^{\sqrt{2}}$. Es ist noch nicht einzusehen, auf welchem Wege der Beweis dieser Vermutung zu erbringen sein könnte. Der logischen Disjunktion nach muß $2^{\sqrt{2}}$ algebraisch oder transzendent sein. Läßt sich aber entscheiden, welches von beiden der Fall ist? Es darf ohne Übertreibung behauptet werden: Würde eines Tages bewiesen, daß die Frage nach der Transzendenz oder Nichttranszendenz von $2^{\sqrt{2}}$ unlösbar ist, so würde damit die Mathematik vor eine Schwierigkeit gestellt, wie sie bisher noch nicht aufgetreten ist.

Dies mag uns zunächst beweisen, daß die Frage nach der Entscheidbarkeit einer Disjunktion nicht trivial ist; daß wir nicht berechtigt sind, sie kurzerhand beiseite zu legen. Ob die Existenz unentscheidbarer Disjunktionen stets ein Zeichen der Unvollständigkeit des Axiomsystems ist, ist zum mindesten fraglich; gewiß ist nur das umgekehrte. Die Unentscheidbarkeit ist in den geometrischen Fällen dadurch nachgewiesen worden, daß man die logische Möglichkeit und Widerspruchslosigkeit beider Fälle nachgewiesen hat. Und das scheint mir an dem Beispiel $2^{\sqrt{2}}$ unmöglich. Sollte diese Zahl als algebraisch nachgewiesen werden, so müßte eine Gleichung angegeben werden, der sie genügt. Und daß sie ihr genügt, muß von etwaigen unbekannten Axiomen unabhängig sein, weil das Nichtgenügen faktisch zu konstatieren ist. —

§ 88. Die Möglichkeit unentscheidbarer Disjunktionen hat Kronecker den Anlaß gegeben, nur solche Disjunktionen anzuerkennen, deren Entscheidbarkeit nachgewiesen werden kann, und nur solche Definitionen zuzulassen, die zugleich Kriterien sind. Die Konsequenzen dieses Standpunktes führen zur Verwerfung der allgemeinen Theorie der Irrationalzahlen und des Kontinuums, weil die Definition der Gleichheit zweier Irrationalzahlen kein Kriterium ist. Sie führen damit zur Verwerfung der Geometrie und der Theorie der unendlichen Mengen; der Geometrie, weil die Gesamtheit der Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, der Mengenlehre, weil die Definition der Identität zweier Mengen kein Kriterium enthält.

Kroneckers Standpunkt ist für die Algebra berechtigt und direkt fruchtbar gewesen. Aber selbst in diesem Gebiet ist er einseitig und zwingt beispielsweise dazu, die Begriffsbildungen Dedekinds, die mit unendlichen Mengen arbeiten, anzufechten, was Kronecker in der Tat getan hat. Hierin ist ihm, soweit ich es übersehen kann, kein einziger seiner Fachgenossen gefolgt.

Es ist hier nicht der Ort, auf algebraische Fragen näher einzugehen. Es genügt für unsere Zwecke die Konstatierung, daß vom Standpunkte Kroneckers aus erhobene Einwände gegen die Mengenlehre die Mathematik selbst treffen und dadurch ihre zu enge Fassung bereits erweisen, ehe man gezwungen ist, die Mengenlehre gegen sie zu verteidigen.

Es scheint mir nun, daß das Postulat der Entscheidbarkeit an einem inneren Widerspruch krankt, der seine Undurchführbarkeit verschuldet. Es gibt nämlich zu einer Disjunktion Anlaß, die dem Postulat selbst nicht zu genügen braucht. Die Betrachtung dieses Verhältnisses ist nicht einfach, wir wollen sie durch eine einfache Symbolik abzukürzen versuchen.

§ 89. Es sei M_1 eine Teilmenge einer Menge M und a ein Element von M_1. So machen wir folgende Disjunktion: Entweder es läßt sich entscheiden, d. h. beweisen, daß a zu M_1 gehört, oder es läßt sich nicht beweisen. Diese Disjunktion ist vollständig und zerlegt M_1 in zwei Teilmengen, die wir ΔM_1 und ∇M_1 nennen wollen [1]. Wenn a zu ΔM_1 gehört, so heißt dies: es läßt sich beweisen, daß a zu M_1 gehört. Wenn a zu ∇M_1 gehört, so ist a ein Element in M_1, von dem sich nicht beweisen läßt, daß es zu M_1 gehört. Dies erscheint paradox; wenn es aber möglich wäre, zu beweisen, daß über die Transzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ keine Entscheidung möglich ist, so wäre $2^{\sqrt{2}}$ eine solche Zahl, die notwendigerweise entweder transzendent aber nicht nachweislich transzendent, oder algebraisch, aber nicht nachweislich algebraisch ist. Wenn wir also schon die logische Vollständigkeit von der Entscheidbarkeit einer Disjunktion trennen, müssen wir die Möglichkeit der Teilmenge ∇M_1 in Betracht ziehen. Verwerfen wir sie als paradox, so erkennen wir damit bereits die Unzulässigkeit eines gesonderten Entscheidbarkeitspostulates an.

Gehört ein Element zu ΔM_1, so ist auch beweisbar, daß es zu ΔM_1 gehört, d. h. es ist

$$\Delta\Delta M_1 = \Delta M_1. \tag{1}$$

Jeder Beweis beweist nämlich seine eigene Möglichkeit. Der Transzendenzbeweis von π beweist zugleich, daß die Transzendenz von π beweisbar ist. Gehört a zu ΔM_1, so heißt das: der Beweis seiner Zugehörigkeit zu M_1 läßt sich führen; es ergibt sich aber damit die Möglichkeit dieses Beweises selbst, d. h. auch die Zugehörigkeit zu ΔM_1 ist beweisbar, a gehört auch zu $\Delta\Delta M_1$.

---

1 Das Zeichen ∇ wird „Nabla" ausgesprochen.

Daraus folgt natürlich als Korollar, daß es in ΔM_1 keine Elemente gibt, deren Zugehörigkeit zu ΔM_1 unbeweisbar wäre. Das heißt, es ist

$$(2) \qquad \nabla \Delta M_1 = 0,$$

worin 0 die fiktive, aus keinem Element bestehende Menge bezeichnet.

Gehört ein Element zu ∇M_1, so kann diese Zugehörigkeit nicht beweisbar sein. Denn da ∇M_1 eine Teilmenge von M_1 ist, würde mit der Zugehörigkeit zu ∇M_1 auch die zu M_1 erwiesen sein. Diese Tatsache läßt sich symbolisch durch

$$(3) \qquad \Delta \nabla M_1 = 0, \qquad (4) \qquad \nabla \nabla M_1 = \nabla M_1$$

ausdrücken. Beide Gleichungen bedingen sich gegenseitig, ebenso wie (1) und (2). Denn jede Menge M_1 ist aus ΔM_1 und ∇M_1 zusammengesetzt und daher mit der einen identisch, wenn die andere fehlt. Analog ist $\Delta M_1 \doteq (\Delta \Delta M_1 + \nabla \Delta M_1)$ und daher gilt (2), weil (1) richtig ist und umgekehrt.

Die Relationen (1) bis (4) zeigen, daß die Zerlegung einer Teilmenge M_1 durch die Disjunktion (Δ, ∇) nicht weiter getrieben werden kann, als bis zu den Mengen ΔM_1 und ∇M_1. Die Zugehörigkeit zur ersten schließt die Entscheidbarkeit ein, die zur zweiten schließt sie aus. Mengen erster Art wollen wir kurzweg Delta-Mengen, die der zweiten Nabla-Mengen nennen. Die definierende Eigenschaft einer Delta-Menge N wird durch jede der Relationen $\Delta N = N$, $\nabla N = 0$, die einer Nabla-Menge N' durch $\Delta N' = 0$, $\nabla N' = N'$ angegeben. Eine Menge M_1, die weder Delta- noch Nabla-Menge ist, besteht aus den beiden komplementären Teilmengen $\Delta M_1 + \nabla M_1$, die nach (1) bis (4) Mengen der beschriebenen Sonderarten sind.

§ 90. Ist nun eine Disjunktion

$$M = (M_1 + M_2) \tag{5}$$

gegeben, so können wir fragen, ob sie entscheidbar ist. Ist dies der Fall, so sind M_1 und M_2 Delta-Mengen, es ist daher insbesondere $(\nabla M_1 + \nabla M_2) = 0$, und diese Relation sagt umgekehrt aus, daß die Disjunktion (5) entscheidbar ist.

Ist die Disjunktion nicht entscheidbar, so können noch einzelne Besonderheiten eintreten, die wir vorweg nehmen wollen. Erstens können M_1 und M_2 Nabla-Mengen sein. In diesem Fall ist die Disjunktion völlig unentscheidbar. Dies tritt z. B. bei der Disjunktion zwischen den Dreiecken von gestreckter und kleinerer Winkelsumme in einer Geometrie ohne Parallelenpostulat ein. Von keinem einzigen Element in M kann entschieden werden, ob es zu M_1 oder M_2 gehört. Wir wollen dabei hervorheben, daß trotzdem natürlich die Zugehörigkeit zu M selbst für alle Elemente beweisbar sein kann. — Zweitens kann M_1 eine Delta-, M_2 eine Nabla-Menge sein. Dann erhalten wir einen Fall, den wir unter den Paradoxieen nochmals antreffen werden: Die komplementäre Menge von M_1 ist so beschaffen, daß ich von keinem ihrer Elemente beweisen kann, daß es zu ihr gehört. Ist a ein Element in M, so kann ich beweisen, daß es in M_1 ist oder ich kann nichts beweisen.

Diese unentscheidbare Disjunktion ist eine logische Folge des Postulats der Entscheidbarkeit. Denn die Zerlegung der Teilmenge M_1 in ΔM_1 und ∇M_1 ergibt gerade die zuletzt beschriebene Art der unentscheidbaren Disjunktion.

Wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall zu und zerlegen in (5) die Teilmengen M_1, M_2, so entsteht eine vierfache Disjunktion

$$M = \varDelta M_1 + \varDelta M_2 + \nabla M_1 + \nabla M_2$$

und aus dieser die zweifache:

$$M = N + N' \tag{6}$$

worin:

$$N = \varDelta M_1 + \varDelta M_2 \tag{7}$$

$$N' = \nabla M_1 + \nabla M_2 . \tag{8}$$

Die Disjunktion (7) ist entscheidbar, (8) völlig unentscheidbar. Die Menge N ist eine Delta-Menge; denn ist a in N, so ist es entweder in $\varDelta M_1$ oder in $\varDelta M_2$; in jedem der beiden Fälle ist die Zugehörigkeit zu der betreffenden Teilmenge beweisbar, also auch die Zugehörigkeit zu N. Über N' läßt sich nichts aussagen, vor allem nicht, daß es notwendigerweise eine Nabla-Menge sein müßte. Wiederholen wir daher die Zerlegung an (6), so entsteht

$$M = P + P', \tag{9}$$

worin:

$$P = \varDelta N + \varDelta N' \tag{10}$$

$$P' = \nabla N + \nabla N' . \tag{11}$$

P ist wieder eine Delta-Menge, P' aber diesmal eine Nabla-Menge, da $\nabla N = 0$. Die Disjunktion (9) ist daher von einer bereits betrachteten Sonderart und unentscheidbar. Die nochmalige Wiederholung der Teilung führt nicht mehr weiter, da $\varDelta P = P$, $\nabla P = 0$, $\varDelta P' = 0$, $\nabla P' = P'$ ist.

Setzen wir für P, P', N, N' aus (10, 11, 7, 8) ihre Bedeutung wieder ein, so finden wir (indem $\nabla N = 0$, $\varDelta N = N$) für (9) die vierfache Zerlegung:

$$M = \varDelta M_1 + \varDelta M_2 + \varDelta(\nabla M_1 + \nabla M_2) + \nabla(\nabla M_1 + \nabla M_2). \tag{12}$$

Bei der Disjunktion algebraisch-transzendent kennen wir beispielsweise in $\varDelta M_1 : \sqrt{2}$, in $\varDelta M_2 : \pi$. Ob es in den beiden

letzten Mengen Elemente gibt, wissen wir nicht. Von einer Zahl α in $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ müßte sich die Unentscheidbarkeit beweisen lassen; bei einer Zahl β dagegen in $\nabla(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ ist nicht nur die Entscheidung, ob algebraisch oder transzendent, sondern auch der Beweis der Unentscheidbarkeit unmöglich. Eine solche Zahl kann demnach nicht angegeben werden.

§ 91. Nun sind in der Disjunktion (12) zwei Unterfälle von besonderer Bedeutung. Ist erstens $\nabla(\nabla M_1 + \nabla M_2) = 0$, so ist die Disjunktion (12) entscheidbar; es bedarf also nur einer neuen Begriffsbildung, um aus der unentscheidbaren zweifachen Disjunktion (5) zu einer entscheidbaren dreifachen zu gelangen. Ein Beispiel hierfür ist mir nicht bekannt. Ist zweitens $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2) = 0$, so heißt das: Es kann kein Element angegeben werden, für das die Disjunktion n a c h w e i s l i c h unentscheidbar ist[1]. Dieser Fall tritt praktisch wirklich ein, und der Nachweis hierfür beruht auf folgender einfachen Bemerkung: W e n n g e z e i g t w e r d e n k a n n, d a ß k e i n E l e m e n t v o n M_1 i n $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ e n t h a l t e n i s t, s o i s t $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2) = 0$; denn andernfalls wäre es ja gewiß, daß alle Elemente dieser Menge in M_2 lägen, gegen die Definition von $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$, die alle Elemente enthält von denen es nachweislich ungewiß ist, ob sie nach M_1 oder M_2 gehören.

Man sieht das gleiche auch aus unserem Kalkul. Ein Element von M_1, das zu $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ gehört, ist Element von ∇M_1. Enthält $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ kein Element aus M_1, so auch keines aus ∇M_1; es ist daher $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2) = \Delta \nabla M_2 = 0$ nach (3).

---

[1] Da gleichwohl $\nabla(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ existieren könnte, braucht die Disjunktion darum noch nicht entscheidbar zu sein. Es läßt sich aber über ihre Entscheidbarkeit nichts ausmachen.

Besonders einfach liegt der Fall dann, wenn M_1 eine Delta-Menge ist. Dann ist nämlich $\nabla M_1 = 0$, $\nabla M_1 + \nabla M_2 = \nabla M_2$ und daher

$$\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2) = \Delta \nabla M_2 = 0.$$

§ 92. Der zuletzt besprochene Fall liegt bei folgendem Beispiel vor: Es sei α irgend eine reelle Zahl und β eine beliebige andere, durch ein Limesverfahren definierte, z. B. ein Dedekindscher Schnitt. Ist dann β von α verschieden, so läßt sich das auch beweisen. Man entwickelt beispielsweise α und β in Dezimalbrüche, so müssen einmal zwei Stellen verschieden ausfallen. (Die Indier sollen vermutet haben, daß π die Wurzel aus 10 sei. Es ist aber $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$, $\pi = 3{,}14\ldots$, also $\sqrt{10} \succ \pi$.) Teilen wir daher die reellen Zahlen in die Mengen M_1 der von α verschiedenen und M_2 der zu α gleichen, so ist $\Delta M_1 = M_1$, und es ist somit unmöglich, zwei Grenzverfahren anzugeben, von denen sich nachweisen läßt, daß über die Gleichheit oder Verschiedenheit ihrer Limites eine Entscheidung unmöglich ist.

Es sei nun weiter α eine algebraische Irrationalzahl; die Reihe der algebraischen Gleichungen kann abzählbar geordnet werden: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ (vgl. Kap. VI § 18). Es sei $f_1(\alpha) = \alpha_1$, $f_2(\alpha) = \alpha_2$, $f_3(\alpha) = \alpha_3$ u. s. f., und die erste Gleichung, der α genügt, sei die $\varkappa$-te, also $f_\varkappa(\alpha) = 0$, dagegen α_1, α_2, bis $\alpha_{\varkappa-1}$ von null verschieden. Von letzterer Tatsache kann ich mich durch eine endliche Anzahl von Operationen überzeugen, indem ich jede der Zahlen α_1 bis $\alpha_{\varkappa-1}$ bis zur ersten, von Null verschiedenen Ziffer ihrer Dezimalbruchentwicklung berechne. Ob dagegen $f_\varkappa(\alpha) = 0$ ist, kann ich möglicherweise nicht entscheiden, wenn nicht α direkt als Wurzel von $f_\varkappa(\alpha) = 0$ definiert ist. Ich kann aber auch nach dem vorangehenden nicht beweisen, daß die Entscheidung unmöglich

ist, denn 0 ist eine reelle Zahl und $f_x(\alpha)$ im allgemeinen ein Schnitt oder eine sonstwie durch ein Grenzverfahren definierte Zahl, und von der Gleichheit der beiden läßt sich zwar nicht die Entscheidbarkeit, aber die Unbeweisbarkeit der Nichtentscheidbarkeit zeigen.

Wenn es also Zahlen gibt, von denen der Nachweis der Unentscheidbarkeit ihrer Transzendenz oder Nichttranszendenz geführt werden kann, so sind sie gewiß nicht algebraisch; es gibt darum solche Zahlen nicht, denn mit dem Nachweis, daß sie nicht algebraisch sind, hätten wir ja die angeblich unmögliche Entscheidung getroffen.

Auch hier liegt das besprochene Schlußschema vor. Ist M_1 die Menge der algebraischen, M_2 die der transzendenten Zahlen, so enthält $\Delta(\nabla M_1 + \nabla M_2)$ keine Zahl aus M_1, existiert also nicht.

Hiermit erkennen wir das dem Postulat der Entscheidbarkeit anhaftende unlösliche Dilemma. Selbst wenn uns vom Standpunkt dieses Postulates aus vorgehalten würde, daß es nachweislich, nicht nur praktisch, kein Kriterium der Transzendenz gibt, können wir immerhin erwidern: Es kann uns aber kein spezielles Beispiel angegeben werden, in dem es ein solches Kriterium nicht geben kann[1].

Zum Schlusse sei noch hervorgehoben, daß das Postulat der Entscheidbarkeit in der Geometrie eine stillschweigende und zugleich nirgends in den Schlüssen auftretende Voraussetzung ist. Ob zwei Punkte verschieden sind oder zusammenfallen, betrachten wir stets als bestimmt, ohne nach einem Kriterium zu fragen.

---

[1] Wie mir Herr Geheimrat H. A. Schwarz mitteilt, hat er an Kronecker tatsächlich als Erwiderung auf dessen Einwände gegen Weierstraß' Irrationalzahlentheorie die Aufforderung gerichtet, ein nachweislich unentscheidbares Beispiel anzugeben.

XXIII.

Die Paradoxie der endlichen Bezeichnung.

§ 93. In § 18 bewiesen wir den Satz der endlichen Bezeichnung, daß eine Menge, in der jedes Element durch eine endliche Zusammenstellung von Zeichen eindeutig beschrieben werden kann, abzählbar ist. Umgekehrt ist auch jede abzählbare Menge einer endlichen Bezeichnung fähig, da ihre Elemente nummeriert werden können.

Das Kontinuum ist demnach einer endlichen Bezeichnung nicht fähig, ebensowenig die zweite Zahlklasse oder die Menge aller stetigen Funktionen, geschweige denn die aller Funktionen. —

Jede Definition ist eine endliche Bezeichnung. Denn alles was in Worten ausgesprochen werden kann, läßt sich schreiben und drucken, also durch eine endliche Anzahl von Zeichen eindeutig beschreiben. Hierauf beruht folgendes Sophisma: Jede irrationale Zahl bestimmt eindeutig einen unendlichen Kettenbruch, dessen unendliche Ziffernreihe als solche natürlich nicht gegeben sein kann. Vielmehr muß ein Bildungsgesetz für diese Ziffern (Nenner) vorliegen, das, wie kompliziert es auch sei, jedenfalls durch eine endliche Anzahl von Buchstaben des Alphabets geschrieben oder gedruckt werden kann. Die Menge der Irrationalzahlen ist also einer endlichen Bezeichnung fähig, d. h. abzählbar, gegen unseren früheren Beweis ihrer Nicht-Abzählbarkeit. —

Der Fehlschluß liegt in der Annahme, daß zu jeder Irrationalzahl ein „Bildungsgesetz“ bekannt sei. Man bestätigt leicht, daß dies nicht zutrifft; es folgt auch sofort aus der korrekten Durchführung unseres Schlusses.

Trotzdem liegt in dem Sophisma eine Schwierigkeit verborgen; nur führt sie nicht zu Paradoxieen und ist schwer in Worte zu

fassen. Irrationalzahlen wie $\sqrt{2}$ und π betrachten wir als gegeben, weil sie definiert sind. Alle in diesem Sinne „gegebenen“ Irrationalzahlen bilden eine abzählbare Menge: es existieren darum Irrationalzahlen, die nicht gegeben sind. Praktisch liegt darin keine Schwierigkeit: Wir haben es noch nicht nötig gehabt, uns mit ihnen zu beschäftigen. Es gibt ja auch algebraische, speziell rationale, auch ganze Zahlen, die noch nicht Gegenstand mathematischer, auf sie allein gerichteter Arbeit waren. Und die Mathematik geht auf die allgemeinen Gesetze aus; die „individuellen“ Eigenschaften irgend einer Zahl haben zumeist nur Interesse als Anwendungen der allgemeinen Gesetze. Sowie wir aber diese Anwendung versuchen, taucht die Schwierigkeit auf: Die Eigenschaften der allgemeinen Irrationalzahlen sind ohne Kriterien definiert; in der Algebra dagegen besitzen wir fast durchweg Kriterien, und sie lassen sich ohne weiteres anwenden, wenn auch die Durchführung der Rechnung trotz ihrer Endlichkeit menschliche Kräfte übersteigen mag.

Die Möglichkeit der Kriterien in der Algebra entspringt aus der Existenz eines allgemeinen endlichen Definitionsschemas der algebraischen Zahl: dies ist die algebraische Gleichung. Ein solches Schema kann es für die allgemeinen Irrationalzahlen nicht geben, weil ihre Menge sonst abzählbar sein müßte. Und darum kann es meines Erachtens auch keine Kriterien, z. B. kein Kriterium der Transzendenz geben. Für eine algebraische Zahl gibt es eine bevorzugte, einfachste Definition: ihre irreduzible Gleichung. Für eine transzendente Zahl gibt es das nicht; z. B. e ist auf zwei Arten definiert, und es existiert kein Gesichtspunkt allgemeiner Natur, der einer dieser Definitionen den Vorzug gäbe. Geht man die Definitionen der bisher untersuchten Transzendenten durch, so findet man Integrale, Reihen und andere Grenzprozesse, transzen-

dente Gleichungen und Kombinationen solcher Hülfsmittel darunter. Werfe ich die Frage auf: „Wie müßte das Kriterium der Transzendenz einer gegebenen Irrationalität aussehen?“, so entsteht sofort die zweite Frage: Wie müßte denn eine „gegebene“ Irrationalität selbst aussehen? Sucht man die Frage irgend wie zu spezialisieren, z. B. durch Beschränkung auf unendliche Reihen und unter diesen etwa auf Kettenbrüche, so sieht man sofort wieder, daß im Falle der Unendlichkeit dieses Bruches — und der kommt allein in Betracht, — ein Bildungsgesetz bekannt sein muß. Wie aber sieht ein Bildungsgesetz aus?

§ 94. Analoge Schwierigkeiten müssen bei jeder nicht-abzählbaren Menge auftreten. Nächst dem Kontinuum am bekanntesten und in ihrer Struktur in mancher Hinsicht einfacher ist die zweite Cantorsche Zahlklasse. Sie zeigt besser als das Kontinuum, welchen Einfluß die Nichtabzählbarkeit auf die mathematische Behandlung hat.

Durch die drei Operationen $\alpha + \beta$, $\alpha . \beta$, α^β und das neue Zeichen ω können wir eine abzählbare Menge von Zahlen der zweiten Klasse systematisch bezeichnen und damit den Anfang der Reihe hinschreiben, aber auch nur den Anfang. Er sieht so aus:

$$
\begin{array}{llllll}
\omega, & \omega+1, & \omega+2, & \ldots & \omega+\varkappa, & \ldots \\
\omega.2, & \omega.2+1, & \omega.2+2, & \ldots & \omega.2+\varkappa, & \ldots \\
\omega.3, & \omega.3+1, & \omega.3+2, & \ldots & \omega.3+\varkappa, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\omega.n, & \omega.n+1, & \omega.n+2, & \ldots & \omega.n+\varkappa, & \ldots \\
\vdots & & & & & \\
\omega^2, & \omega^2+1, & \omega^2+2, & \ldots & \omega^2+\varkappa, & \ldots
\end{array}
$$

$$\omega^2+\omega,\quad \omega^2+\omega+1,\quad \ldots \text{ u. s. f.}$$

$$\vdots$$

$$\omega^2+\omega.n,\quad \ldots$$

$$\omega^2.2,\qquad \omega^2.2+1,\quad \ldots \text{ u. s. f.}$$

Wir gelangen zu ω^3, ω^4, ... ω^ω, weiter zu ω^{ω^ω} etc., und sind damit imstande, alle Zahlen unterhalb der ersten Epsilonzahl zu bezeichnen. Diese selbst aber genügt den drei Gleichungen $\omega+\varepsilon = \omega.\varepsilon = \omega^\varepsilon$, läßt sich also nicht durch unsere drei Operationen auf ω zurückführen. Fügen wir jetzt ε als neues Zeichen zu den bisher benutzten Zeichen 0, 1, ... 9, ω hinzu, so gestattet dieses neue Zeichensystem die Bezeichnung bis zur zweiten ε-Zahl. Bezeichnen wir die Epsilonzahlen durchweg mit ε_α, worin α der Ordnungstypus der Menge aller vorangehenden Epsilonzahlen ist, so gelangen wir damit bis zu der ersten Epsilonzahl, die ihrem eigenen Index gleich ist und für die eine Bezeichnung noch nicht eingeführt ist. Wir sehen also, daß die Bezeichnung der zweiten Zahlklasse dauernd zur Einführung neuer Zeichen zwingt. Interessant ist dabei nun die Tatsache, daß nur eine endliche Anzahl von neuen Zeichen erforderlich ist, um bis zu einem vorgeschriebenen Typus zu gelangen. Es ist also jede Zahl der zweiten Klasse einer endlichen Bezeichnung fähig, die ganze Zahlklasse selbst dagegen nicht. Das kann nicht ernstlich befremden, wenn man sich erinnert, daß die zweite Zahlklasse ein Haupttypus, d. h. allen ihren Resten ähnlich ist. Bis zu welcher Zahl wir auch vordringen, stets ist der Rest noch von derselben Struktur; hinter jeder noch so weit vorgetriebenen Bezeichnung liegt wieder dieselbe Menge unbezeichneter Zahlen, wie hinter ω selbst. Analoge Verhältnisse treten bei der Menge der endlichen Zahlen auf. Auch dort liegen hinter jeder Zahl ebensoviele wie hinter der Eins.

Und beispielsweise gibt es zu jeder ganzen Zahl a eine Basis x eines Zahlsystems, in dem a eine vorgeschriebene Anzahl von Stellen hat. Trotzdem also jede Zahl etwa sechsstellig geschrieben werden kann, gibt es kein Bezeichnungsschema um alle ganzen Zahlen sechsstellig zu schreiben. Analog ist das Verhalten der zweiten Zahlklasse, die selbst nicht endlich bezeichnet werden kann, wiewohl jeder Abschnitt einer endlichen Bezeichnung fähig ist.

§ 95. Die vorstehenden Erörterungen zeigen einen Unterschied im Gebrauch der Worte „alle" und „jeder", hinter dem man, vielleicht mit Recht, vielleicht auch nicht, einen logischen Unterschied gesucht hat, ohne ihn bisher fixieren zu können. Wenn wir die bisherigen Betrachtungen daraufhin durchsehen, so scheint der Unterschied gar nicht in den Worten „alle" und „jeder", sondern in dem Doppelsinn des Wortes „ein" zu liegen, dessen Sinn zwischen „je ein" und „ein und dasselbe" wechselt, wie in folgenden Beispielen:

Es gibt für jede Zahl der zweiten Klasse eine endliche Darstellung, aber nicht eine endliche Darstellung aller Zahlen der zweiten Klasse.

Es giebt für jede Transzendente ein Kriterium ihrer Transzendenz, aber nicht für alle Transzendenten ein Kriterium. (Dieser Satz ist durchaus problematisch.)

Da der Unterschied hier wohl klar zu Tage liegt, könnte der Gegenstand verlassen werden. In jüngster Zeit ist aber dem Paradoxon der endlichen Darstellung eine Formulierung gegeben worden, die auf der soeben beschriebenen Verwechslung beruht; und da diese Formulierung das Paradoxon durch Festlegung im Druck für absehbare Zeit dem Schicksal entrissen hat, trotz

seiner Beliebtheit als mathematische Stammtischunterhaltung eines Tages in Vergessenheit zu geraten, so sei es gestattet, an dieser Stelle darauf einzugehen.

a) Da es nicht für alle Zahlen des Kontinuums eine endliche Darstellung geben kann, so gibt es Zahlen, die nicht endlich darstellbar sind.

b) Es sei *M* die Menge aller endlich darstellbaren Zahlen des Kontinuums. Sie ist abzählbar, definiert also nach dem Diagonalverfahren eine nicht in ihr enthaltene Zahl *u*.

c) *u* ist nicht darstellbar, weil nicht in *M* enthalten. Wir haben aber seine Definition soeben mit einer endlichen Anzahl von Worten ausgesprochen, also ist *u* doch endlich darstellbar.

Daß a) falsch ist, war soeben gezeigt. Es gibt keine endliche Darstellung für alle Zahlen des Kontinuums zugleich, trotzdem kann jede einzelne endlich darstellbar sein, wie wir deutlicher an der zweiten Zahlklasse sahen, auf die das Paradoxon ebensogut paßt. Infolgedessen ist auch der Schluß b) falsch, der nur a) umkehrt.

Im übrigen verdient hervorgehoben zu werden, daß die Disjunktion zwischen endlich darstellbaren und endlich nicht darstellbaren Zahlen unentscheidbar ist, da es natürlich unmöglich ist, Zahlen der zweiten Art anzugeben: jede Definition ist eine eo ipso endliche Darstellung. Man könnte also, wenn das Paradoxon wirklich ernsthaft wäre, seine Lösung getrost derjenigen höheren Intelligenz überlassen, die einer Kenntnis endlich nicht darstellbarer Zahlen fähig ist.

Beachtet man noch, daß eine endliche Darstellung eine Zuordnung eines Dings zu einer Zeichenkombination ist, so erkennt man, daß überhaupt jedes Ding endlich darstellbar ist; wenigstens ist nicht einzusehen, warum ich ihm nicht eine bis jetzt sinnlose

Kombination soll zuordnen können. Endliche Darstellbarkeit hat also nur, auf abzählbare Mengen angewandt, einen vernünftigen Sinn, nicht aber, wenn von einzelnen Dingen die Rede ist. —

XXIV.

Ultrafinite Paradoxieen.

§ 96. Wir kommen nun zu einem ernsthaften Mangel, der den mengentheoretischen Betrachtungen in ihrer allgemeinen Durchführung anhaftet. Er besteht in der Ungeklärtheit des Begriffs der Menge selbst. Wir kennen unendliche Mengen, auf die unsere Betrachtungen widerspruchsfrei anwendbar sind, aber wir haben bisher keine Kenntnis derjenigen Eigenschaften, die der Definition einer Menge zu eigen sein müssen, damit diese Widerspruchslosigkeit gewährleistet ist. Daß solche vorhanden sein müssen, können wir durch die Existenz paradoxer Mengen zeigen. Da der Ausgangspunkt der Mengenlehre ein rein logischer zu sein scheint, nehmen auch die Paradoxieen, auf die wir stoßen, zum Teil einen rein logischen Charakter an, wie das Paradoxon von Russell. Diese sind aber wieder ungefährlich, da sich die in ihnen auftretenden Begriffe als unscharf nachweisen lassen. Eine ernste Schwierigkeit liegt dagegen in dem Paradoxon einer anscheinend mathematisch definierten Menge, die wir an zweiter Stelle betrachten wollen.

Von den paradoxen Mengen, die wir hier untersuchen, läßt sich leicht zeigen, daß sie von größerer Mächtigkeit als jedes Alef sind. Wie nun unendliche Mengen bei der Anwendung des endlichen Anzahlbegriffs Paradoxieen ergeben, so scheint wiederum bei Mächtigkeiten, die über jedes Alef hinausgehen, die Anwen-

dung der transfiniten Mächtigkeitslehre zu versagen. Ob der Grund dafür in gewissen unentdeckten Axiomen des Transfiniten oder aber in der Definition der paradoxen Mengen selbst steckt, die dann gar nicht existieren würden, das ist noch unentschieden. Wir wollen diese Art Mengen und die ihnen eigenen Widersprüche als ultrafinit bezeichnen, hiermit das Wort transfinit auf Mengen beschränkend, auf die die Lehre vom Transfiniten anwendbar ist. Der Vorschlag, das Wort „Menge“ selbst für widerspruchsfreie Mengen zu reservieren, ist noch nicht zu allgemeiner Anerkennung durchgedrungen. Auch kann ich mich ihm hier darum nicht anschließen, weil die paradoxen Begriffe, von denen ich berichten werde, allgemein unter den Namen: „Menge aller Mengen“, „Menge aller Ordnungszahlen“ bekannt sind.

§ 97. Bei der Wohlordnung lernten wir die Operation $+1$ kennen, die im Anhängen eines Elementes besteht. Darin liegt die stillschweigende Annahme, daß man zu jeder Menge noch ein Element hinzufügen kann. Betrachtet man aber die „Menge aller Dinge“, so sieht man, daß diese Annahme eine Beschränkung des Mengenbegriffs enthält. Ferner war in Kap. VIII bewiesen, daß die Menge M aller Teilmengen von M höhere Mächtigkeit hat, als M selbst. Dieser Satz kann für die Menge aller Dinge nicht gut zutreffen, da es offenbar keine Menge von höherer Mächtigkeit geben kann. Betrachten wir den in § 24 geführten Beweis näher, so sehen wir, daß wir ihn an unserem Beispiel wesentlich vereinfachen können. Nennen wir zunächst die Menge aller Dinge $\mathfrak{D}$. Jede Teilmenge von $\mathfrak{D}$ ist eine Menge, also ein Ding (nämlich ein Gegenstand des Denkens), also in $\mathfrak{D}$ als Element enthalten. Wir brauchen darum nicht erst anzunehmen, daß eine besondere Zuordnung zwischen den Dingen und

den Teilmengen von 𝔇 hergestellt werde: wir ordnen jede Teilmenge sich selbst zu, d. h. wir wählen die Identität als Zuordnung.

Der Beweis des § 24 betrachtet nun die Teilmenge Y aller Dinge von 𝔇, die in den ihnen zugeordneten Teilmengen nicht enthalten sind. Ist daher N eine Teilmenge von 𝔇, so haben wir zu fragen: Ist N in sich selbst enthalten? Wenn ja, so rechnen wir es zu einer Menge X, wenn nein, zu Y. Y ist also die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten. Solche Mengen gibt es. Z. B. jedes Element von 𝔊 ist eine ganze Zahl, 𝔊 selbst aber nicht. 𝔊 enthält sich daher nicht. —

Der Schluß des § 24 nimmt jetzt folgende Gestalt an:

1) Y enthalte sich selbst, d. h. es befinde sich unter den Mengen, die wir zu Y rechnen. Wir rechnen aber zu Y diejenigen Mengen die sich nicht selbst enthalten.

2) Y enthalte sich nicht selbst, so ist es eine der Mengen, die wir zu Y rechnen, daraus aber folgt: Y enthält sich selbst.

Dies ist das Russelsche Paradoxon[1] von der Menge der Men-

---

[1] Russell, The Principles of Mathematics. Russell hat dort das Paradoxon auf die verschiedensten logischen Formen gebracht, von denen die folgende hier wiedergegeben sei (§ 78. l. c.):

Jedes Prädikat a (im logischen Sinne) läßt sich entweder von sich selbst aussagen und möge dann der Kürze halber als „prädikabel" bezeichnet werden, oder es läßt sich nicht von sich selbst aussagen, dann möge es „imprädikabel" heißen. Das Prädikat „denkbar" ist prädikabel, denn es ist selbst denkbar. Das Prädikat „tugendhaft" ist „imprädikabel", denn es ist selbst nicht tugendhaft.

Die Disjunktion zwischen prädikabel (p) und imprädikabel (i) ist vollständig: Jedes Prädikat a ist entweder p, d. h. a ist a, oder es ist i, d. h. a ist *non*-a. Demnach ist auch das Prädikat i = imprädikabel entweder i oder p. Ist es aber prädikabel (p), so heißt das: „i ist i", im Widerspruch mit „i

gen, die sich nicht selbst enthalten. Es ist nicht speziell mathematisch, daher auch dem Laien verständlich, aber zugleich ungefährlich für den Mathematiker, der ja mit der Menge aller Dinge nichts zu tun hat.

Die Lösungsversuche des Russelschen Paradoxons[1] sind durchweg Problemverschiebungen, wie der folgende: „Eine Menge ist von jedem einzelnen ihrer Elemente verschieden[2]. Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, ist daher die Menge aller Mengen überhaupt. Diese aber existiert nicht, da sie ja, als Menge, eines ihrer Elemente sein müßte.“ Hier wird aus der Paradoxie auf die Nichtexistenz der Menge geschlossen. Die formale Vereinfachung des Paradoxons nimmt diesem Schluß weder die Banalität, noch den Charakter des Zirkels, der durch den Anspruch hinzukommt, das Paradoxon zu erklären.

§ 98. Da die „Menge aller Dinge“ auch mathematisch nichtdefinierbare Objekte enthält, braucht ihre Paradoxie den Mathematiker nicht sonderlich zu beunruhigen. Leider gibt es aber auch rein-mathematisch definierte Mengen, die in sich wider-

---

ist p“. Und ist es imprädikabel, (i ist i), so ist es damit von sich selbst ausgesagt, also prädikabel (p).

In dieser rein logischen Form ist das Paradoxon von Unendlichkeitsfragen frei, wenigstens formal. Man möge danach den Wert der Behauptung beurteilen, die Mathematik verdanke ihre Sicherheit lediglich der Logik.

[1] Die kurz vor Beendigung des Drucks erschienene Arbeit Poincarés (Revue de Métaphysique et de Morale XIV, 3) konnte leider nicht mehr berücksichtigt werden. Ihre Bedeutung geht über das hier besprochene Problem weit hinaus.

[2] Auch dann, wenn sie nur ein Element enthält. Die Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen z. B. enthält unendlich viele Dinge, die aus dem einen Ding $\mathfrak{G}$ bestehende Menge $\{\mathfrak{G}\}$ aber nur dieses eine Ding. $\{\mathfrak{G}\}$ ist also von $\mathfrak{G}$ verschieden.

spruchsvoll sind, und ich halte es für gewiß, daß diese Widersprüche denselben Ursprung haben, wie das Paradoxon von 𝔇. Als Typus solcher paradoxen Mengen kann die Menge W aller Ordnungszahlen bezeichnet werden. Daß sie paradox ist, ergibt unser Satz XXXIII, nach dem W eine nicht in ihr enthaltene Ordnungszahl definieren müßte, die andererseits in W als der Menge aller Ordnungszahlen enthalten wäre.

In der Tat: Nach Satz XXXII ist W wohlgeordnet. Der Ordnungstypus ξ von W wäre daher ein Element von W; der Abschnitt dieses Elementes hätte nach Satz XXX den Ordnungstypus ξ, d. h. W wäre einem seiner Abschnitte ähnlich, gegen Satz XXIII.

Die erste Veröffentlichung über diese Paradoxie stammt von Herrn Burali-Forti. Nach einer Mitteilung von Herrn Bernstein ist sie aber Georg Cantor schon früher bekannt gewesen. Ich halte sie für auch heute noch völlig ungelöst und werde keinen Versuch machen, sie zu beheben. Dagegen ist es notwendig, die einzelnen Lösungsversuche kurz zu besprechen.

Erster Versuch: Jeder Abschnitt von W ist wohlgeordnet, W selbst nicht.

Wir haben bereits gezeigt, daß W wohlgeordnet ist. Außerdem würde aus der Wohlordnung jedes Abschnittes von W ohne weiteres die Wohlordnung von W folgen.

Zweiter Versuch: W ist wohlgeordnet, hat aber keinen Ordnungstypus. Dieser Aussage vermag ich keinen Sinn abzugewinnen. Die Aussage, daß eine wohlgeordnete Menge M einen Ordnungstypus μ besitzt, behauptet, daß eine Menge M' existiert, der M ähnlich ist. Da nun auf alle Fälle M zu sich selbst ähnlich ist, definiert jede wohlgeordnete Menge einen Ordnungstypus.

Dritter Versuch: Es ist nicht möglich, ein Element m hinter die Menge W zu ordnen, d. h. die Vereinigungsmenge $(W+m)$ so zu ordnen, daß m auf alle Elemente von W folgt. Auch den Sinn dieser Behauptung vermag ich nicht zu verstehen. Sind a, b zwei verschiedene Elemente der Vereinigungsmenge $(W+m)$, so sind entweder beide in W oder eines von ihnen ist mit m identisch, das andere in W. Das Zeichen $a \prec b$ möge im ersten Fall den bekannten Sinn haben, im zweiten Fall möge es die Behauptung aussprechen, daß b dasjenige der beiden Elemente sei, welches mit m identisch ist. Durch diese Festsetzung ist faktisch m hinter alle Elemente von W geordnet; ein Beweis, daß solches unmöglich sei, kann also nur davon ausgehen, daß die Bildung der Vereinigungsmenge $(W+m)$ bereits ohne jede Ordnungsfestsetzung unmöglich ist. Dies ist in der Tat der

Vierte Versuch: Es ist nicht möglich, die Vereinigungsmenge $(W+m)$ zu bilden. Diese Behauptung ist direkt falsch, wenn nicht etwa W mit der Menge $\mathfrak{D}$ identisch ist, die doch alle Dinge, nicht nur Ordnungszahlen enthält. Aus der Tatsache allein, daß m hinter W geordnet werden und dadurch zu einem Widerspruch Anlaß geben könnte, läßt sich auf die Nichtexistenz von $(W+m)$ nur durch folgenden Zirkel schließen:

„$(W+m)$ enthält einen Widerspruch. Er rührt davon her, daß diese Menge nicht gebildet werden darf. Sie darf aber darum nicht gebildet werden, weil sie einen Widerspruch enthält."

Übrigens wird durch das Verbot der Bildung von $(W+m)$ nichts gewonnen. Ordnet man nämlich[1] das erste Element 0 von

[1] Durch die Vorschrift: $\alpha \prec \beta$ bedeute, daß α von β verschieden ist, und zwar, wenn beide von 0 verschieden sind, daß $\alpha \prec \beta$ ist, dagegen, wenn eine der beiden Zahlen die 0 ist, daß β diese Zahl bezeichnet.

W hinter den mit 1 beginnenden komplementären Rest *W'* von *W*, so erhält man, da *W'* zu *W* ähnlich ist, eine wohlgeordnete Menge von höherem Typus als *W*. Endlich bedeuten die beiden letzten Versuche nichts anderes als eine Anfechtung des ersten Erzeugungsprinzips, das im Anhängen eines Elementes besteht. Damit wird die Bildung von *W* selbst fraglich, und sofern die besprochenen Versuche das Ziel verfolgen, die Widerspruchslosigkeit von *W* zu retten, gleichen sie daher dem Verfahren des Mannes, der den Ast absägt auf dem er sitzt, oder jenes Ehepaares, das aus seinem brennenden Hause Stiefelknecht und Mausefallen rettet, das Kind aber vergißt.

Die Menge *W* selbst ist übrigens gegen alle Ehrenrettungen im höchsten Grade undankbar. So bemühen sich im 60sten Bande der mathematischen Annalen gleichzeitig Bernstein und Jourdain um ihre Widerspruchslosigkeit, wobei der erste auf Grund der Eigenschaften von *W* beweist, daß es Mengen gibt, die nicht wohlgeordnet werden können, während dem zweiten der Beweis des Gegenteils gelingt.

§ 99. Das Paradoxon der Menge *W* erinnert an diejenigen Antinomieen, die nach Kant entstehen, wenn wir die Natur als ein abgeschlossenes Ganze betrachten. Nach Fries entspringt ferner die Unendlichkeit des Raumes, der Zeit und der Zahlenreihe daraus, daß sie als formale Bedingungen der Erfahrung deren unvollendbaren Charakter widerspiegeln müssen. Wie weit diese Argumentation durch die mengentheoretischen Entdeckungen beeinflußt werden mag, — ob dies der Fall ist, muß hier außer Betracht bleiben, — sie ist jedenfalls auf die Mengen $\mathfrak{D}$ und *W* mit aller Schärfe anwendbar. Die Menge aller Dinge ist kein abgeschlossenes Ganze, weil unsere Erkenntnis jederzeit unabge-

schlossen ist, und die Menge W ist als formales „Gerippe" des unvollendbaren Prozesses der Bildung wohlgeordneter Mengen selbst unvollendbar. Nicht das Operieren mit den Begriffen W und $\mathfrak{D}$ ist die Quelle der Widersprüche, vielmehr sind diese Begriffe selbst unhaltbar. Hiermit soll eine Lösung des Paradoxons nicht gegeben sein, wir werden vielmehr die Schwierigkeit sofort an einer anderen Stelle auftreten sehen. Aber sie erscheint dort nicht mehr unbehebbar.

Es fehlt uns bis heute völlig an einer tiefgehenden Kritik des Mengenbegriffs. Die Leichtigkeit, mit der sich mit Zahlen- und Punktmengen einwandfrei operieren läßt, hat zu einem unberechtigten Vertrauen auf die Zulässigkeit des Zusammenfassens unendlich vieler Dinge zu einer Menge geführt. Wenn wir daher die Menge aller Ordnungszahlen als widerspruchsvollen Begriff erkennen, sind wir aufs höchste befremdet, da im Begriff der transfiniten Ordnungszahl ein Widerspruch nicht zu entdecken ist. Die Operation des Zusammenfassens galt vor Entdeckung der Mengenlehre nur für eine endliche Anzahl von Individuen als zulässig. Unendliche Mengen hielt man für schlechtweg paradox. Diese einfache Scheidung ist heute hinfällig geworden, aber paradoxe Mengen existieren noch immer. Wenn wir daher konstatieren, daß die Zusammenfassung aller Ordnungszahlen zu einer Menge unzulässig ist, so sind wir nicht in der Lage, diese Unzulässigkeit aus den Begriffen „Menge" und „Ordnungszahl" zu beweisen, wir müssen uns lediglich mit dem Faktum des Widerspruchs begnügen.

Nimmt man den im vorigen Paragraphen besprochenen vierten Vorschlag an, so entsteht ein analoges Problem für die mengentheoretischen Operationen, insbesondere das Verbinden zweier Mengen. Es ist leicht einzusehen, daß hierdurch die ganzen Er-

gebnisse der Mengenlehre mit einem großen Fragezeichen versehen werden. Denn wenn die elementarsten Voraussetzungen unbekannte Grenzen ihrer Zulässigkeit haben, gilt das Gleiche von allen darauf gestützten Folgerungen. Ganz anders, wenn das Fragezeichen an den Begriff der Menge gesetzt wird. Dann wissen wir zwar nicht, was alles in den Bereich der Mengentheorie fällt; wir wissen aber von einzelnen Mengen, z. B. den beiden ersten Zahlklassen, daß sie dazu gehören, und für diese bleiben daher alle unsere Folgerungen in Kraft. In der Tat kann das Paradoxon von W an den Ergebnissen der ersten vier Teile unseres Referates nicht rütteln, insbesondere nicht an den allgemeinen Sätzen über Ordnungszahlen, die im Bereich der zweiten Zahlklasse sicher richtig sind und ebenso für jede weitere, die als widerspruchsfreie Menge gelten darf.

Die Menge aller Ordnungszahlen ist nur ein typisches Beispiel paradoxer Mengen. Aus jeder zu ihr ähnlichen Menge muß ein analoger Widerspruch entspringen. Dies ist in der Tat der Fall für die Mengen aller Hauptzahlen, aller ε-Zahlen, ebenso für die Menge aller Alefs. Und nicht nur der Ordnungstypus dieser Mengen, sondern auch ihre Mächtigkeit besitzt die widerspruchsvolle Eigenschaft, letzte ihrer Art zu sein: Die Mächtigkeit von W wäre größer als jedes Alef, obwohl sie selbst ein Alef sein müßte. Diese Tatsache mag die Bezeichnung „ultrafinit“ rechtfertigen.

XXV.

Auswahlprinzipien.

§ 100. Ist eine Menge gegeben, so kann man aus ihr ein Ding auswählen, aus der übrigbleibenden Teilmenge ein zweites, sodann wieder ein drittes; eine endliche Menge läßt sich auf diesem Wege

erschöpfen und wird dadurch zugleich wohlgeordnet. An einer unendlichen Menge kann das Verfahren bis zu jeder endlichen Zahl fortgesetzt werden.

So einleuchtend diese Tatsache ist, so enthält sie doch ein Postulat, das noch nicht einmal leicht zu formulieren ist. Im allgemeinen wird dieses Postulat der Auswahl eines Dinges dahin verstanden, daß man ein Ding der Menge angeben kann. Und man pflegt es auch in speziellen Beispielen als erfüllt nachzuweisen. So beruht der Cantorsche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen zunächst auf der Abzählbarkeit der abgebraischen und der Nichtabzählbarkeit aller reellen Zahlen. Sieht man ihn genauer an, so werden tatsächlich transzendente Zahlen durch eben diesen Beweis der Nichtabzählbarkeit vermittelst des Diagonalverfahrens angegeben. Aber es kann nicht behauptet werden, daß der Existenznachweis jeder Menge stets ein Element anzugeben gestatten müsse, wenn es auch anscheinend bisher in fast allen Fällen zutrifft. Hierbei stößt man offenbar auf die Frage, welcher Unterschied zwischen Existenz und logischer Möglichkeit besteht. Wir werden sehen, daß unter Anerkennung gewisser unendlicher Auswahlen bewiesen werden kann, daß jede Menge, z. B. auch das Kontinuum, wohlgeordnet werden kann. Wenn eine Menge wohlgeordnet werden kann, so ist ihre Mächtigkeit ein Alef, $\aleph_\alpha$. Die Menge M aller ihrer Wohlordnungen besitzt alsdann die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$. Es läßt sich also etwas über M aussagen ohne daß man eines ihrer Elemente kennt. Faktisch ist bis heute keine Wohlordnung des Kontinuums bekannt. Darf man trotzdem ihre Existenz oder aber nur ihre logische Möglichkeit annehmen? Diese Frage kann ich nicht entscheiden. Ich bin aber der Ansicht, daß man den Unterschied zwischen einer Menge, von der ein Element angebbar ist, und einer als logisch

möglich erkannten Menge dadurch nicht beseitigt, daß man beide als existierend bezeichnet.

Auf die logische Möglichkeit der Wohlordnung des Kontinuums stützt sich ein Satz aus der allgemeinen Funktionentheorie, an dem uns hier nur der Beweis interessiert. Es muß nämlich bei diesem Beweis vorausgesetzt werden, daß eine bestimmte Wohlordnung des Kontinuums vorliegt. In dieser Voraussetzung steckt offenbar eine erweiterte Fassung unseres Auswahlpostulates, die etwa in folgender Weise ausgesprochen werden kann: Ist eine Menge M logisch widerspruchslos definiert, so enthält die Annahme, daß eines ihrer Elemente gegeben sei, keinen logischen Widerspruch.

In dieser Fassung ist das Postulat noch nicht trivial. Beispielsweise die Menge der endlich nicht darstellbaren Zahlen genügt ihm nicht. Dies war auch einer der Gründe, mit denen das Paradoxon der endlichen Darstellung abgetan werden konnte. Ein gleiches gilt von der problematischen Menge derjenigen Irrationalzahlen, über deren Transzendenz oder Nichttranszendenz eine Entscheidung unmöglich ist. Unsere ganze Betrachtung dieser Menge hatte den Nachweis dieser Tatsache zum Zweck.

Ob und wie weit die letzte Fassung des Postulates der einmaligen Auswahl brauchbar und zulässig ist, muß ich dahingestellt sein lassen. Es kam mir nur darauf an, Beispiele für die verschiedenen Fassungen anzuführen.

§ 101. Aus der Möglichkeit, ein Element auszuwählen, folgt, wie wir sahen, die Möglichkeit jeder endlichen Auswahl und zugleich die Wohlordnung der ausgewählten endlichen Menge. Die Wohlordnung ist nun für endliche Mengen etwas Gleichgültiges, da sie, wenn nicht gegeben, jederzeit hergestellt werden kann.

Aber auch die Idee einer Auswahl hat mit der Wohlordnung nichts zu thun. Wenn ich drei Elemente a, b, c auswähle, so kann es mir unter Umständen ganz gleichgültig sein, in welcher Reihenfolge dies geschieht. Beurteile ich die Auswahl in diesem Sinne, so werde ich alle Auswahlen als gleichwertig betrachten, die dieselbe Teilmenge liefern, so daß Teilmengen und Auswahlen korrespondierende Begriffe werden. Das Auswählen selbst ist nur ein Verfahren, das ich zur Herstellung einer Teilmenge verwende. Bei endlichen Mengen ist dieses Verfahren zweifellos hinreichend zur Erzeugung der Menge aller Teilmengen, die ja selbst endlich ist; und wenn ich bei der Auswahl einer Teilmenge von der Reihenfolge absehe, so ist diese Auswahl nichts anderes, als eine einmalige Auswahl eines Elementes aus der Menge aller Teilmengen.

Die konsequente Ausdehnung des Auswahlprinzips auf unendliche Mengen führt daher zu dem Postulat der Existenz der Menge aller Teilmengen. Da seine Zulässigkeit angefochten worden ist, ist es jedenfalls praktisch erforderlich, dieses Postulat aufzustellen.

Betrachten wir insbesondere die Menge der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}$. Jeder Teilmenge ist eindeutig eine Zahl des Kontinuums zugeordnet, und die Umkehrung gilt auch, von einem unwesentlichen Ausnahmefall abgesehen. (Vgl. § 53). Wenn also die Existenz des Kontinuums, in welchem Sinne sie auch gemeint sei, zugegeben oder angefochten wird, so gilt das gleiche von der Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$. Da allgemein das erste zutrifft, haben wir hier einen Fall, in dem unser Postulat erfüllt ist.

Die Menge aller Teilmengen des Kontinuums wird schon mit mehr Berechtigung angegriffen, da man von ihr nicht viel weiß. Von ihrer Existenz kann man nur reden, wenn man den Begriff

dieser Existenz schärfer faßt. Man übersieht leicht, daß die ganze Frage in engem Zusammenhange mit dem Kontinuumproblem steht.

§ 102. Da die Menge aller Teilmengen von M nichts anderes ist, als die Belegungsmenge 2^M, so ist das Postulat ihrer Existenz in einem allgemeineren Postulat enthalten, welches die Existenz der Belegungsmenge N^M zweier existierenden Mengen M und N verlangt. Eine wichtige Anwendung dieses Postulates ist nicht bekannt, wenn von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{G}}$ abgesehen wird, einer Menge, die sich wieder als das Kontinuum interpretieren läßt. (Vgl. § 52). Doch steckt das Postulat implizite im allgemeinen Funktionsbegriff, da die Menge aller Funktionen die Belegungsmenge des Kontinuums mit sich selbst ist.

Die Belegungsmenge ist ein spezieller Fall der Verbindungsmenge einer unendlichen Menge M von Mengen N. Diese war so definiert: keine zwei der Mengen N sollen ein Element gemeinsam haben. Element der Verbindungsmenge heißt eine Menge M' von folgender Eigenschaft: Sie ist zu M aequivalent, und ist n das Element von M', welches dem Element N von M entpricht, so ist n ein Element von N. Wenn alle Mengen N zu ein und derselben Menge P aequivalent sind, geht die Verbindungsmenge in die Belegungsmenge P^M über. Postulieren wir die Existenz der Verbindungsmenge unendlich vieler Mengen, so ist darin wieder die Existenz der Belegungsmenge enthalten. Gibt es eine Menge P von der Eigenschaft, daß jede der Mengen N einem Teil von P aequivalent ist, — und eine solche ist die Vereinigung aller Mengen N, — so folgt umgekehrt die Existenz der Verbindungsmenge aus der der Belegungsmenge. Wir haben es also hier nicht mit einem wesentlich neuen Postulat zu thun.

Alle diese Postulate können als Auswahlprinzipien bezeichnet werden, insofern ihre Gültigkeit, d. h. die Existenz der postulierten Mengen, an endlichen Mengen durch willkürliche Auswahl bewiesen werden kann. Man bezeichnet jedoch mit dem Namen des Auswahlprinzipes schlechthin ein Postulat, welches in dem zuletzt genannten enthalten ist und anscheinend weniger fordert. Dieses Auswahlprinzip κατ' ἐξοχην verlangt, daß mindestens ein Element der Verbindungsmenge existieren soll. Das heißt, ausführlich dargestellt: Ist eine Menge M gegeben, deren Elemente N selbst Mengen sind, so gibt es eine Menge M', die aus jeder Menge N ein und nur ein Element enthält. — Man kann sich hierin leicht von der Voraussetzung frei machen, daß die Mengen N kein Element gemeinsam haben sollen, und erhält dann diejenige Formulierung, der das Prinzip den Namen des „Auswahlprinzips" verdankt: „In einer Menge M von Mengen N ist es möglich, aus jeder Menge N ein Element auszuwählen." Dieses Postulat ist nicht nur für endliche Mengen nachweislich erfüllt, sondern auch für jede Menge M von wohlgeordneten Mengen N. In diesem Fall kann eine Auswahl durch die Festsetzung getroffen werden, daß M' aus den ersten Elementen der Mengen N bestehen soll.

§ 103. Hiermit haben wir die wichtigsten Auswahlprinzipien genannt, die eine Wohlordnung oder sonst irgend eine Ordnung nicht postulieren. Diese Bemerkung ist wichtig, weil solche Prinzipien, die mit der Auswahl zugleich die Wohlordnung der ausgewählten Elemente verlangen, wesentlich enger sind, als die hier genannten. Wir gelangten zu den bisher betrachteten Prinzipien, indem wir zwei Auswahlen nur dann als verschieden ansahen, wenn die ausgewählten Teilmengen verschieden waren.

Unter diesem Gesichtspunkt erscheint auch eine Auswahl von mehreren Elementen nur als eine einzige Auswahl. Gehen wir jetzt dazu über, eine zunächst endliche Auswahl in eine endliche Reihe geordneter Auswahlen zu zerlegen, und betrachten wir zwei Auswahlen derselben Teilmenge als verschieden, wenn die Elemente dieser Teilmenge in verschiedenen Reihenfolgen ausgewählt werden, so gelangen wir zu Postulaten, die nicht nur die Existenz, sondern auch die Wohlordnung gewisser Teilmengen fordern. Sie sind zweifellos für eine endliche Teilmenge zulässig. Ist nun die Menge, aus der ausgewählt wird, unendlich, so ist es prinzipiell möglich, jede endliche Teilmenge aus ihr auszuwählen. Doch ist es klar, daß dieser Prozeß nicht als vollendbar gedacht werden kann, es sei denn, daß man ein neues Postulat hinzufügt. Dieses wird nur dahin formuliert werden können, daß eine Vorschrift existiert, welche jeder ganzen Zahl n ein Element $\varphi(n)$ von M eindeutig zuordnet, derart, daß $\varphi(n)$ von $\varphi(m)$ verschieden ist, wenn n von m verschieden ist. Es liegt gegen dieses Postulat, nach welchem man aus einer unendlichen Menge stets eine Teilmenge vom wohlgeordneten Typus ω soll auswählen können, kein anderes Bedenken vor, als das seiner Unfruchtbarkeit. Es nimmt nämlich den Satz vorweg, dessen Beweis ein wichtiges Problem der Mengenlehre bildet: daß jede unendliche Menge transfinit, d. h. einer Teilmenge äquivalent ist. (Vgl. § 14) Zu einer Zeit, als man den Auswahlpostulaten nicht mit so scharfer Kritik gegenüberstand, wie heute, galt die Plausibelmachung unseres Postulates als Beweis des genannten Satzes. Man schloß aus der Möglichkeit, jede endliche Menge aus M auswählen zu können, auf die Möglichkeit, ω auszuwählen, übersah aber dabei, daß dieser Prozeß, sofern die Willkür dabei im Spiele ist, kein Ende nimmt. In der Tat, soll der Beweis des Satzes XI

in § 15 einsetzen können, so muß von jedem Element in M feststehen, ob es zu der ausgewählten Menge vom Typus ω gehört oder nicht. Diese Auswahl muß daher vollendet sein, und das ist niemals der Fall, wenn ich Element nach Element willkürlich herausgreife[1].

§ 104. Man kann nun das Postulat der Auswahl des Typus ω in der Weise verallgemeinern, daß man fordert: Jede Auswahl, die möglich ist, soll nach dem Typus ω iteriert werden können. Wenn ich also ein Element auswählen kann, kann ich auch ω Elemente auswählen; kann ich ω Elemente auswählen, so kann ich auch ω-mal ω Elemente auswählen, d. h. eine Menge vom Typus ω^2. Analog kann ich den Typus ω^3, ω^4, ... und nach meinem Prinzip auch ω^ω auswählen. Dies kann ich fortsetzen, und zwar ohne zu einem Ende zu gelangen, es sei denn die Menge werde erschöpft. In diesem Fall ist die ausgewählte Menge mit der gegebenen identisch, aber sie ist jetzt wohlgeordnet. Gelange ich zu keinem Ende, so kommt der Pferdefuß zum Vorschein: Dann wird jeder Ordnungszahl ein Element von M zugeordnet, und es besitzt danach M eine zu W ähnliche Teilmenge.

Es ist schon paradox, auf diese Weise dem Verfahren, das zu keinem Ende gelangt, schließlich doch ein Ende beizubringen. Aber diese Paradoxie ist im Begriff der Menge W begründet, und es ist von vornherein klar, daß mit der Möglichkeit einer zu W äquivalenten Teilmenge in M dem Widersinn Tür und Tor geöffnet wird. Der harmloseste Fall ist noch der, daß diese Teilmenge

[1] Auch die unendlich vielen Ziffern eines Dezimalbruches können successive durch Willkür festgesetzt werden, z. B. nach dem Vorschlag eines verstorbenen, angesehenen Mathematikers durch Auswürfeln. Aber eine Aussage über die dadurch definierte Zahl, die nur für diese Zahl gälte, wäre erst möglich nach Vollendung des Prozesses, und dieser ist unvollendbar. —

mit M identisch, also M nach dem Typus W wohlgeordnet ist. Dann partizipiert M an allen Paradoxieen von W, bringt aber wenigstens keine neuen hinzu. Nimmt man aber gar an, es bestehe M aus einer zu W äquivalenten Teilmenge M_1 und einer komplementären Menge M_2, so steht man vor folgender Alternative: Entweder die Menge M_2 kann nun nicht mehr wohlgeordnet werden (denn sonst käme man über W hinaus), oder M_2 kann doch noch wohlgeordnet, aber nicht mehr so an M_1 angehängt werden, daß das ganze wohlgeordnet ist. Die Paradoxie des zweiten Falls war schon bei der Paradoxie von W selbst besprochen. Im ersten Fall dagegen wird das Postulat, von dem wir ausgingen, selbst umgestoßen, da es eine Menge M_2 gibt, auf die das Auswahlprinzip nicht mehr anwendbar ist.

Aber zwischen diesen Alternativen bietet sich noch ein Ausweg, wenn er auch schon zur reinen Selbstironie führt. Man kann nämlich W jeden anderen Typus voransetzen, ohne daß sich W erhöht. Denn zu jedem Typus α gibt es einen nächsthöheren Haupttypus $\alpha\omega$; dieser ist Abschnitt in W, und da $\alpha + \alpha\omega = \alpha\omega$ ist, folgt unsere Behauptung.

Nehmen wir also an, auch M_2 lasse sich successive wohlordnen, hängen aber die dabei entstehenden ausgewählten Mengen nicht mehr àn W an, da uns dies im Interesse der Existenz von W verboten ist, setzen sie vielmehr vor M_1 voran. Wie weit dies Verfahren iteriert werden kann, will ich lieber nicht erörtern. Sollte es dafür eine Grenze geben, so können wir noch andere Wege einschlagen, z. B. indem wir hinter jedes Element von W, mit Ausnahme eines etwa vorhandenen endlichen Restes, eine endliche Zahl von Elementen einfügen, wodurch sich bekanntlich der Typus auch nicht erhöht.

§ 105. Es hat keinerlei Wert, diese Gedankenreihe weiter auszuspinnen. Das Vernünftigste ist noch, den paradoxen Fall als unmöglich auszuschließen und zu konstatieren, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Sehen wir uns aber den Beweis dieser Behauptung an, so erkennen wir, daß er einem Zirkel bedenklich ähnlich ist. Unser Postulat fordert nämlich erstens die Existenz einer Menge von Dingen, die „Auswahlen" genannt werden, und diese Menge ist so definiert, daß sie wohlgeordnet ist. Zweitens verlangt unser Postulat, daß jede einzelne Auswahl ein Element aus M herausnimmt, d. h. daß jedem Ding der Menge der Auswahlen ein Ding von M zugeordnet werden kann. Dies alles läuft auf die Forderung hinaus, daß eine wohlgeordnete Menge existiert, der die Elemente von M umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können; dadurch wird aber M wohlgeordnet, d. h. um die Möglichkeit der Wohlordnung von M zu beweisen, haben wir ein spezielles Verfahren zur Herstellung dieser Wohlordnung postuliert.

Bedenkt man noch, daß auch bei diesem erweiterten Postulat der wiederholten Auswahl in einem gegebenen Einzelfall ein Gesetz existieren muß, welches die Reihenfolge der auszuwählenden Elemente vorschreibt, so erkennt man, daß hier der gleiche Zirkel vorliegt, durch den man aus dem Postulat der wiederholten einmaligen willkürlichen Auswahl beweist, daß jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält.

In jüngster Zeit ist man gegen die Verwendung der Auswahlprinzipien recht mißtrauisch geworden und betrachtet alle mit ihrer Hülfe geführten Beweise mit kritischem Blick. Die zuerst betrachteten Auswahlpostulate, die, vom Begriff der Ordnung unabhängig, die Existenz gewisser Mengen, z. B. der Menge aller Teilmengen, der Menge aller Belegungen oder der Menge der

„ausgezeichneten“ Elemente fordern, sind alle für spezielle Fälle unentbehrlich; z. B. beruht der Beweis, daß es keine höchste Mächtigkeit gibt, auf dem Teilmengenpostulat oder auf dem allgemeineren der Existenz der Belegungsmenge. Der Beweis dagegen, daß eine Menge von komplementären Teilmengen in M nicht höhere Mächtigkeit als M besitzt[1], wird dadurch geführt, daß man sich aus jeder Teilmenge ein Element ausgewählt denkt. Daß insbesondere die Existenz des Kontinuums mit der aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$ zusammenhängt, war bereits betont.

Von den Postulaten der wiederholten einfachen Auswahl ist dagegen bis jetzt keine brauchbare Anwendung gemacht worden, und man darf sie daher mit Recht ablehnen. —

XXVI.

Erzeugungsprinzipien.

§ 106. Man denkt sich die natürlichen Zahlen zumeist als Erzeugnisse des Zählprozesses, der in der Vermehrung um die Zahl Eins besteht. Da dieser Prozeß unvollendbar ist, könnte konsequenterweise die Menge der ganzen Zahlen nicht als abgeschlossenes Ganze betrachtet werden, wenn nicht die Mengenlehre diesen Abschluß forderte. Die Entdeckung, daß es höhere Mächtigkeiten des Unendlichen gibt, als die des Zählprozesses, hat in erster Linie bahnbrechend gewirkt, sodann aber auch die Entdeckung der allgemeinen wohlgeordneten Mengen mit der in ihnen enthaltenen Fortsetzung des Zählprozesses durch das Limesverfahren.

Von den verschiedenen Erweiterungen der Menge $\mathfrak{G}$ erfolgt die Einführung der rationalen Zahlen durch eine einheitliche, rein

[1] Von diesem Satz ist in diesem Referat kein Gebrauch gemacht worden.

formale Definition, ebenso die der Irrationalzahlen. Von einem Erzeugungsprinzip im Sinne des Zählprozesses kann hier nicht die Rede sein. Dagegen läßt sich die Erweiterung der Zahlenreihe in die höheren Zahlklassen hinein durch Erzeugungsprinzipien darstellen und historisch ging diese Methode, soweit die zweite Zahlklasse in Betracht kommt, der allgemeinen Theorie der wohlgeordneten Mengen voran. Den Namen „Erzeugungsprinzipien" halte ich in einer Hinsicht nicht für glücklich, insofern diese Prinzipien nicht ausreichen, die Eigenschaften der erzeugten Gebiete vollständig zu beweisen. Er ist aber eingebürgert und es läßt sich auch manches zu seinen Gunsten sagen.

Jede Limeszahl der zweiten Klasse ist Limes der Menge aller vorangehenden, also einer abzählbaren Menge. In § 45 ist gezeigt worden, daß sie auch Limes einer Menge vom Typus ω ist. Eine Zahl, die kein Limes ist, besteht aus einer Limeszahl und einem endlichen Rest, der durch das wiederholte Hinzufügen eines Elementes, d. h. durch den Zahlprozeß entsteht. Zur successiven Definition der zweiten Zahlklasse genügt es also, folgende beiden Operationen zu postulieren:

Erstes Erzeugungsprinzip: Hinzufügen eines Elementes zu einer bereits erzeugten Zahl.

Zweites Erzeugungsprinzip: Bildung des Limes über eine Reihe vom Typus ω bereits erzeugter Zahlen.

Das zweite Prinzip ist notwendig und hinreichend für die zweite Zahlklasse. Daß es auch nur für diese hinreicht, folgt aus dem Satz XL 4, dessen allgemeiner Beweis so große Schwierigkeiten bereitete. Aus ihm geht hervor, daß die Anfangszahl Ω_1 der dritten Klasse nicht Limes einer Reihe vom Typus ω sein kann. Denn alle Zahlen dieser Reihe müßten niederer als Ω_1, also von der Mächtigkeit $\aleph_0$ sein. Die Reihe selbst ist auch von dieser

Mächtigkeit, somit auch der Limes selbst, während Ω_1 von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist. Will man daher zu den Zahlen der dritten Klasse gelangen, so braucht man als drittes Erzeugungsprinzip den Limes über eine Reihe vom Typus Ω_1, und von diesem Prinzip läßt sich auf dem gleichen Wege zeigen, daß es zu allen Zahlen der dritten Klasse, nicht aber darüber hinaus führt. Man erhält durch diese Betrachtung die abzählbare Reihe von Erzeugungprinzipien der vierten, fünften, ... $n$ten Zahlklasse. Auf diese sämtlichen Zahlklassen folgt zunächst die „ω-te Klasse" der Zahlen von der Mächtigkeit $\aleph_\omega$. Diese macht eine Ausnahme, wie alle Zahlklassen, deren Mächtigkeit einen Limes zum Index hat. Die Anfangszahl Ω_ω des $\aleph_\omega$ ist der Limes einer abzählbaren Reihe $\Omega_0 = \omega$, Ω_1, Ω_2, Ω_3, ..., bedarf also nur des ersten Erzeugungsprinzips. Ist ferner α irgend eine Limeszahl der ωten Klasse, so ist sie auch Limes einer Reihe, deren Typus eine der Anfangszahlen ω, Ω_1, Ω_2, ... bis Ω_ω ist. (§ 45). Man erkennt aber leicht, daß mit Ω_ω selbst auch jede Reihe vom Typus Ω_ω einen Kern vom Typus ω besitzt. Ein Erzeugungsprinzip, welches die Existenz des Limes einer Reihe vom Typus Ω_ω forderte, ist also nicht erforderlich. Dafür ist aber in der Existenz der unendlichen Reihe der vorangehenden Erzeugungsprinzipien ein neues Postulat enthalten. Da diese Tatsache nur der Vollständigkeit halber erwähnt ist, sei auch noch bemerkt, daß unter den Limesmächtigkeiten die ξ-Zahlen eine Sonderstellung einnehmen. — Für die Mächtigkeit $\aleph_{\omega+1}$ muß wieder ein neues Erzeugungsprinzip postuliert werden. Die Reihe der Erzeugungsprinzipien ist ähnlich zu der der Mächtigkeiten, also vom Typus W. Man pflegt daher vielfach an Stelle der Existenz aller Ordnungszahlen die aller Erzeugungsprinzipien anzufechten.

§ 107. Es war behauptet, daß die Erzeugungsprinzipien nicht zum vollständigen Beweis aller Eigenschaften der erzeugten Gebilde ausreichen. Wir wollen, um das zu zeigen, die übliche Herleitung der ganzen Zahlen aus dem ersten Prinzip betrachten. Das erste Prinzip geht von folgenden Axiomen aus:

1. Es gibt eine Operation φ und ein Ding, genannt „die Eins", 1, auf welches die Operation φ anwendbar ist.

2. Ist φ auf a anwendbar, so existiert auch $\varphi(\varphi(a))$.

Hiernach definieren wir die Zwei als $\varphi(1)$, die Drei als $\varphi(2)$ etc., wobei es zunächst belanglos ist, nach welchem Verfahren wir die Namen der erzeugten Elemente bilden. Daß wir durch die Operation φ dauernd neue Elemente erhalten, ist ein besonderes Axiom, dessen wir aber zunächst nicht bedürfen.

Nunmehr definieren wir die Operationen $+1$, $+2$, ... etc. durch folgende Festsetzungen: $a+1$ bedeutet $\varphi(a)$, $a+2$ bedeutet $\varphi(a+1)$, $a+3$ bedeutet $\varphi(a+2)$, ... allgemein ist $a+(n+1) = \varphi(a+n)$. Diese Definition ist eine typische Definition durch Induktion. Die Operation $+1$ ist die gegebene; jede weitere ist definiert durch

$$a+(n+1) = (a+n)+1. \tag{1}$$

Wir schließen daran sofort die Definitionen des Produktes und der Potenz:

$$(2)\ a.1 = a, \qquad (3)\ a.(n+1) = a.n+a$$

$$(4)\ a^1 = a, \qquad (5)\ a^{n+1} = a^n.a.$$

Um nun die bekannten Gesetze des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens zu beweisen, bedienen wir uns des Schlusses von n auf $n+1$.

A. Associatives Gesetz der Addition:

$$a+(b+c) = (a+b)+c. \tag{6}$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (1). Gilt es für $c = n$, d. h. ist $a + (b + n) = (a + b) + n$, so folgt:

$$\begin{aligned}(a+b)+(n+1) &= [(a+b)+n]+1 \quad \text{nach (1)}\\ &= [a+(b+n)]+1 \quad \text{nach Voraussetzung}\\ &= a+[(b+n)+1] \quad \text{nach (1)}\\ &= a+[b+(n+1)] \quad \text{nach (1),}\end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

B. Distributives Gesetz der Addition und Multiplikation:

(7) $$a(b+c) = ab+ac.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (3) und (2). Es sei ferner giltig für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}a[b+(n+1)] &= a[(b+n)+1] \quad \text{nach (1)}\\ &= a(b+n)+a \quad \text{nach (3)}\\ &= (ab+an)+a \quad \text{nach Voraussetzung}\\ &= ab+(an+a) \quad \text{nach (6)}\\ &= ab+a(n+1) \quad \text{nach (3),}\end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

C. Associatives Gesetz der Multiplikation:

(8) $$a.(b.c) = (a.b).c.$$

Es gilt für $c = 1$ nach (2). Es gelte für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}a.[b.(n+1)] &= a[bn+b] \quad \text{nach (3)}\\ &= a(bn)+ab \quad \text{nach (7)}\\ &= (ab)n+ab \quad \text{nach Voraussetzung}\\ &= (ab)(n+1) \quad \text{nach (3),}\end{aligned}$$

d. h. es gilt auch für $c = n + 1$.

Die folgenden Gesetze des Potenzierens führen keine besonderen Namen, entsprechen aber dem distributiven und associativen Gesetz:

(9) $$a^{b+c} = a^b . a^c.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (5) und (4). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a^{b+(n+1)} &= a^{(b+n)+1} = a^{b+n}.a && \text{nach (1) und (5)} \\ &= (a^b.a^n).a = a^b(a^n.a) && \text{nach Voraussetzung und (8)} \\ &= a^b.a^{n+1} && \text{nach (5).} \end{aligned}$$

(10) $$(a^b)^c = a^{bc}.$$

Das Gesetz gilt für $c = 1$ nach (4) und (2). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} (a^b)^{n+1} &= (a^b)^n.(a^b) = a^{bn}.a^b && \text{nach (5) und Voraussetzung} \\ &= a^{bn+b} = a^{b(n+1)} && \text{nach (9) und (3).} \end{aligned}$$

§ 108. Die Gesetze (6) bis (10) gelten auch für transfinite Zahlen; nicht so die jetzt folgenden:

Kommutatives Gesetz der Addition:

(11) Hilfssatz. $$a+1 = 1+a.$$

Er gilt für $a = 1$. Gilt er für $a = n$, so folgt:

$(n+1)+1 = (1+n)+1 = 1+(n+1)$ nach Voraussetzung und (1).

(12) $$a+b = b+a.$$

Die Formel gilt nach (11) für $b = 1$. Gilt sie für $b = n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a+(n+1) &= (a+n)+1 = (n+a)+1 && \text{nach (1) und Voraussetzung} \\ &= 1+(n+a) = (1+n)+a && \text{nach (11) und (6)} \\ &= (n+1)+a && \text{nach (11).} \end{aligned}$$

(13) **Zweites distributives Gesetz:** $(a+b)c = ac+bc$.

Es gilt für $c = 1$ nach (2). Gilt es für $c = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}(a+b)(n+1) &= (a+b)n + (a+b) \text{ nach (3)}\\ &= (an+bn) + (a+b) \text{ nach Voraussetzung}\\ &= (an+a) + (bn+b) \text{ nach (12) und (6)}\\ &= a(n+1) + b(n+1) \text{ nach (3).}\end{aligned}$$

Kommutatives Gesetz der Multiplikation:

(14) Hilfssatz. $a.1 = 1.a$.

Er gilt für $a = 1$. Gilt er für $a = n$, so folgt:

$$(n+1).1 = n+1 = 1.n+1 = 1.(n+1) \text{ nach (2), (3).}$$

(15) $a.b = b.a$.

Die Formel gilt für $b = 1$ nach (14). Sie gelte für $b = n$, so folgt:

$$\begin{aligned}a.(n+1) &= a.n+a = n.a+1.a \text{ (3, Voraussetzung, 14)}\\ &= (n+1)a \text{ nach (13).}\end{aligned}$$

Zum Schlusse beweisen wir noch die Formel:

(16) $(ab)^c = a^c.b^c$.

Sie gilt für $c = 1$ nach (4). Sie gelte ferner für $c = n$, so wird:

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n.(ab) = (a^n.b^n).(ab) \text{ nach (5) und Voraussetzung}\\ &= (a^n.a).(b^n.b) \text{ nach (15) und (8)}\\ &= a^{n+1}.b^{n+1} \text{ nach (5).}\end{aligned}$$

Die Beweise der Formeln (12, 13, 15, 16) gehen alle auf den speziellen Fall (11) des kommutativen Gesetzes der Addition zurück und sind daher in keiner Weise für transfinite Zahlen zu verallgemeinern, da bei diesen (11) nicht gilt. Dagegen gilt (14) noch allgemein.

§ 109. Die Übertragung der Beweise des § 107 auf transfinite Zahlen bedarf zunächst einer Erweiterung der Definitionen des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens. Diese wieder stützt sich auf die höheren Erzeugungsprinzipien, die in der Einführung des Limesbegriffes enthalten sind. Wir definieren alsdann:

$$a + \lim b = \lim (a + b) \tag{17}$$

$$a . \lim b = \lim (a . b) \tag{18}$$

$$a^{\lim b} = \lim (a^b) \tag{19}$$

Diese Formeln wurden im § 80 bewiesen; hier dienen sie als Definitionen. Die dritte hat Georg Cantor als Definition der Potenz beibehalten, während er die beiden ersten durch die Bildung der Vereinigungs- und Verbindungsmenge und ihre Wohlordnung ersetzte. In den Ausführungen der §§ 67 und 79 haben wir gesehen, daß auch die induktorische Definition der Potenz vermieden werden kann.

Um nun zu zeigen, daß die Gesetze (6) bis (10) auch für Limeszahlen gelten, wenden wir den charakteristischen Schluß vom Abschnitt auf den Limes an. Eine Limeszahl $c = \lim \lambda$ ist Limes aller vorangehenden Zahlen λ. Für diese sei das associative Gesetz $a + (b + \lambda) = (a + b) + \lambda$ bewiesen. Dann folgt:

$$a + (b + c) = a + (b + \lim \lambda) = a + \lim (b + \lambda) = \lim [a + (b + \lambda)]$$

nach (17). Nach Voraussetzung wird weiter:

$$a + (b + c) = \lim [(a + b) + \lambda] = (a + b) + \lim \lambda = (a + b) + c.$$

Analog wird:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= a(b + \lim \lambda) = a \lim (b + \lambda) = \lim [a(b + \lambda)] \\ &= \lim [ab + a\lambda] = ab + \lim (a\lambda) = ab + a \lim \lambda \\ &= ab + ac \text{ nach (17, 18) und Voraussetzung.} \end{aligned}$$

$$a(bc) = a[b \lim \lambda] = a . \lim (b\lambda) = \lim [a(b\lambda)] = \lim [(ab)\lambda]$$
$$= (ab) \lim \lambda = (ab)c \text{ nach (18) und Voraussetzung.}$$

$$a^{b+c} = a^{b+\lim \lambda} = a^{\lim (b+\lambda)} = \lim a^{b+\lambda} = \lim (a^b a^\lambda)$$
$$= a^b \lim a^\lambda = a^b . a^{\lim \lambda} = a^b . a^c \text{ (17—19 und Voraussetzung).}$$

$$(a^b)^c = (a^b)^{\lim \lambda} = \lim (a^b)^\lambda = \lim a^{b\lambda} = a^{\lim b\lambda} = a^{b \lim \lambda} = a^{bc}$$
$$\text{(18, 19 und Voraussetzung)}$$

$$1 . c = 1 . \lim \lambda = \lim (1 . \lambda) = \lim (\lambda) = c = c . 1 \text{ (nach (2)).}$$

Die Undurchführbarkeit der kommutativen Gesetze folgt nun daraus, daß $(\lim \lambda) + a$ nicht gleich $\lim (\lambda + a)$ ist, eine Tatsache, die schon früher ausführlich erörtert wurde und sich unmittelbar aus der Forderung ergibt, daß die Operation $+1$ stets zu einem neuen Element führen soll.

§ 110. Die Durchsichtigkeit und Schönheit der ausgeführten Beweismethode darf uns nicht darüber täuschen, daß ihre Begründung lückenhaft ist. Erst durch eine einwandfreie Grundlegung können wir verstehen, worin das zwingende der ganzen Schlußkette liegt. Daß sie zwingend ist, liegt wenigstens für die endlichen Zahlen auf der Hand. Wir erkennen nämlich, daß der Beweis eines der angeführten Gesetze in jedem Spezialfall durch eine endliche Anzahl von Schlüssen geführt wird. Es kann uns also niemand ein Beispiel angeben, welches unseren Gesetzen widerspräche; wir sind vielmehr bei jedem derartigen Beispiel in der Lage, den Rechenfehler, der ihm zu Grunde liegen muß, systematisch aufzudecken.

Der Beweis, daß 2 mal 2 gleich vier ist, würde sich nach unserer Methode folgendermaßen gestalten:

2 ist definiert als $1 + 1$.

$2 . 2$ ist definiert als $2 . 1 + 2$

2.1 ist nach Definition gleich 2.

2.2 ist demnach definiert als $2+2$.

$2+2$ ist seinerseits definiert als $(2+1)+1$.

$2+1$ heißt 3, $3+1$ heißt 4.

Es liegt von dieser Betrachtung aus der Schluß nahe, daß die ganze Algebra aus analytischen Sätzen bestehe. Sie enthält aber nicht nur die speziellen Sätze $3+4 = 4+3$, $2+7 = 7+2$ u. s. f., sondern den allgemeinen Satz $a+b = b+a$. Jeder Spezialfall dieses allgemeinen Satzes ist durch eine endliche Anzahl von Schlüssen beweisbar, aber die Zahl der Schlüsse ist umso größer, je größer die Zahlen a und b sind: Die Kette derjenigen Schlüsse, die zum Beweis des allgemeinen Satzes erforderlich sind, ist unendlich.

Die Bedenken, die man an diese Tatsache angeknüpft hat, sind noch nicht alt. Heute noch sind viele Mathematiker der Ansicht, daß eine unendliche Schlußkette überhaupt zu keinen prinzipiellen Bedenken Anlaß gäbe. Nachdem sich aber die Analysis des Unendlichen auf den Standpunkt gestellt hat, daß eine unendliche Reihe von Additionen kein Resultat hat, weil sie zu keinem Ende kommt, wird man konsequenterweise diesen Standpunkt auf jede unendliche Folge irgend welcher Gedankenoperationen ausdehnen müssen. Faktisch sind wir ja auch weit entfernt, etwa alle Schlüsse des Beweises für den Satz $7.13 = 13.7$, obwohl ihre Zahl endlich ist, wirklich durchzudenken, geschweige denn, daß die sämtlichen Syllogismen eines unendlichen Beweises irgendwie ausführbar wären. Das wesentliche an der Durchführbarkeit solcher Schlußketten ist vielmehr ihr gesetzmäßiger Bau. Diesen aufzudecken und in ihm die logische Ergänzung der anfechtbaren Schlußreihe nachzuweisen ist eine Aufgabe, auf die uns die Kritik der Erzeugungsprinzipien hinweist.

Hier liegt nun zunächst ein Zirkel sehr nahe, der einen bereits angedeuteten Gedanken weiter führt. Wir können nämlich sagen: Der Schluß von n auf $n+1$ beweist zunächst in der Tat gar nicht, daß beispielsweise $a.b = b.a$ ist, er beweist nur, daß wir jeden Spezialfall dieses Satzes, etwa $7.13 = 17.3$, durch eine endliche Schlußkette beweisen können. Aber erstens kann auch die Endlichkeit aller dieser unendlich vielen Ketten wiederum nur durch eine unendliche Schlußkette bewiesen werden, und zweitens setzt der Beweis dieser Endlichkeit den Begriff der endlichen Anzahl voraus, der doch durch unser Erzeugungsprinzip erst gebildet werden soll.

§ 111. Herr Poincaré hat in seinem Werke „La science et l'hypothèse" den Induktionsschluß eingehend erörtert und vertritt dabei die Anschauung, daß dieser Schluß logisch unbegründbar, also ein synthetisches Urteil a priori sei. Er begründet diese Anschauung unter anderem mit folgenden Worten:

„Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience."

Diese Worte scheinen mir einer Deutung fähig, die über die beabsichtigte psychologische Begründung der Induktion in unzulässiger Weise hinausgeht. Denn wir können uns keineswegs von jedem Schritt die unendliche Wiederholung noch auch jede Art der Unendlichkeit dieser Wiederholung vorstellen. Es klingt zwar sehr plausibel, daß wir durch n Schlüsse beweisen, daß $a.b = b.a$

für alle Zahlen $b = 1$ bis $b = n$ gilt, und daß demnach durch unendlich viele Schlüsse folgt, daß das Gesetz alle Zahlen von 1 bis Unendlich umfaßt. Aber mit der gleichen Begründung ohne jede nähere Bezeichnung des besonderen Unendlichen könnte man ebensogut behaupten, das kommutative Gesetz umfasse auch die transfiniten Zahlen.

Nehmen wir als zu wiederholenden Schritt die Operation $+1$ selbst, so erzeugt sie nach n-maliger Wiederholung, von $1+1$ ausgehend, die Zahl $n+1$, durch unendliche Wiederholung aber keine Zahl. Und betrachten wir etwa die Wiederholung der Operation, die von einer wohlgeordneten Menge das erste Element wegnimmt und hinten ansetzt, so erzeugt ihre unendliche Wiederholung an einer endlichen Menge keine eindeutig definierte Anordnung, und an der Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen ergäbe sich ein eigenartiges Dilemma: Es wäre nach unendlicher Wiederholung jedes Element von $\mathfrak{G}$ transportiert, $\mathfrak{G}$ wäre von seiner ersten Stellung völlig verschwunden und stände jetzt „hinter sich selbst" verschoben; die unendliche Wiederholung würde also $\mathfrak{G}$ selbst ergeben. Andererseits erhöht jede endliche Anwendung des Transportes den Ordnungstypus der Menge. Wir erhielten successive aus dem Typus $\omega = 1, 2, 3, \ldots$ den Typus $\omega + 1$ in $2, 3, 4 \ldots, 1$, $\omega + 2$ in $3, 4, 5, \ldots 1, 2$ u. s. f. Die unendliche Wiederholung würde also eine Menge von niedererem Typus liefern, als jede endliche Wiederholung. Dieses paradoxe Ergebnis zeigt, daß die unendliche Wiederholung, soweit ihr Resultat in Betracht kommt, einer besonderen Definition bedarf und durchaus nichts schlechthin Vorstellbares ist.

Das, was wir uns vorstellen können, ist die Menge aller endlichen Wiederholungen eines Schrittes. Mit dieser Formulierung fallen wir aber auf die endliche Zahl als Grundbegriff

zurück und können sie daher nicht durch Wiederholung einer Operation erzeugen. Einem ähnlichen Zirkel fallen die höheren Erzeugungsprinzipien anheim; der Limes über eine Menge vom Typus ω kann diesen Typus selbst nicht erst erzeugen, sondern setzt ihn voraus; er ist der Operationsbereich des ersten Prinzips. Ebenso ist der Limes über einen Typus Ω_1 von der Erzeugung dieses Typus als Operationsbereich des ersten und zweiten Prinzips abhängig. Und auch in der Erzeugung des Typus Ω_ω, der anscheinend keines neuen Prinzips bedarf, steckt doch wieder die Annahme, daß das Aufsteigen von einer Mächtigkeit zur nächstfolgenden analog dem ersten Prinzip nach dem Typus ω iteriert werden kann. —

§ 112. Man könnte versuchen, den Operationsbereich des Aufstieges $+1$ dadurch zu kennzeichnen, daß man nicht nur die Wiederholbarkeit der Operation fordert, („Ist φ auf a anwendbar, so auch auf $\varphi(a)$") sondern noch hinzusetzt, daß auch jedes Element mit Ausnahme des ersten aus einem anderen durch die Operation gebildet werde. Doch läßt sich leicht zeigen, daß diese Annahmen nicht genügen.

Wir betrachten die komplexen ganzen Zahlen, d. h. Zahlen der Form $a+bi$, worin a, b ganze positive oder negative Zahlen sind und $i^2 = -1$ ist. Wir ordnen sie nach folgender Vorschrift: Es gelte $a+bi$ für „später" als $c+di$, wenn im algebraischen Sinn entweder $b \succ d$ oder $b = d$, $a \succ c$ ist. (Danach ist z. B. $3+4i \succ 4+3i \succ 2+3i$.) Bei dieser Festsetzung dürfen Ungleichungen addiert werden.

Nun ist offenbar

$$(1) \qquad i \succ 1.$$

Es sei ferner

$$(2) \qquad pi \succ p$$

worin p irgend eine Zahl unseres Bereiches ist. Diese Ungleichung (2) gilt nach (1) gewiß für $p = 1$, und ist (2) richtig, so folgt durch Addition von (1) und (2):

$$(p+1)i \succ p+1.$$

Wäre in unserem Bereich der Schluß von n auf $n+1$ zulässig, so müßte (2) für jede Zahl p gelten, die nach der Eins kommt. Für $3+5i \succ 1$ ist aber

$$(3+5i)i = -5+3i \prec 3+5i.$$

Der Grund der Unzulässigkeit des Induktionsbeweises ist klar: zwischen 1 und $3+5i$ liegen unendlich viele Zahlen. Es muß also ausdrücklich festgesetzt werden, daß jede Zahl durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen der Operation $+1$ aus der Eins entsteht. Es genügt nicht, daß jede aus der vorangehenden durch diese Operation erzeugt wird.

Unser Beispiel verweist uns aber zugleich auf einen Weg, den wir im nächsten Kapitel betreten werden: die hier betrachtete Menge besitzt Reste ohne erstes und Abschnitte ohne letztes Element. Wenn wir solche Teilmengen ausschliessen, gelangen wir in der Tat zu einer Formulierung des Operationsbereiches des Schlusses von n auf $n+1$, die den Begriff der endlichen Zahl nicht voraussetzt. Aber auch hierbei geben wir den Begriff des Erzeugungsprinzips auf, indem wir von der fertigen Menge sprechen.

§ 113. Die Ergebnisse unserer Betrachtungen können wir in zwei Thesen zusammenfassen:

A) Der Begriff der Wiederholung setzt den endlichen Anzahlbegriff in irgend einer Form voraus.

B) Demnach enthält der Versuch, die Reihe der ganzen Zahlen durch successive Wiederholung ein und derselben Operation zu „erzeugen", eine petitio principii, die eine logische Begründung der mathematischen Induktion auf diesem Wege unmöglich macht.

Beide Thesen sind in zahlreichen Einzelfällen so allgemein anerkannt, daß man sie mit Recht für trivial erklären kann. Die konvergenten Prozesse der Analysis mit ihren unendlichen Wiederholungen von Additionen, Multiplikationen, Divisionen oder Integrationen bilden ein schlagendes Beispiel für die erste These. In meinem ersten Referate behauptete ich bereits: eine unendliche Reihe von Additionen fördert kein Resultat zu Tage, weil sie kein Ende hat. Die Resultate solcher Prozesse werden vielmehr mittelst des analytischen Limesbegriffes gesondert definiert. Auf der Inhaltlosigkeit des Begriffs einer unendlichen Wiederholung beruht auch die Unfruchtbarkeit aller Versuche, die Infinitesimalrechnung auf einer Theorie unendlich kleiner Größen aufzubauen. Daß eine solche Theorie überflüssig ist, war das Ergebnis der Untersuchungen meines ersten Referates. Daß sie unfruchtbar ist, haben alle Versuche einschließlich des jüngsten von Herrn Geißler unternommenen schlagend bewiesen. Den Grund dieser Unfruchtbarkeit haben Cantor, Peano und andere aufgedeckt: Zum Beweise beispielsweise des Taylorschen Satzes oder zur Definition eines bestimmten Integrals bedarf man, um von unendlich kleinen zu endlichen Größen zu gelangen, einer unendlich wiederholten Addition. Die Definition dieser Wiederholung stößt auf Schwierigkeiten, die, wahrscheinlich unüberwindlich, sicher bis heute nicht überwunden sind. Und eine Be-

gründung der Infinitesimalrechnung, die auf das Integral und den Taylorschen Lehrsatz verzichten muß, versperrt sich von vornherein die Möglichkeit produktiver Betätigung.

Dagegen bietet die Lehre von den wohlgeordneten Mengen eine der glücklichsten Definitionen der unendlichen Wiederholung vermittelst ihres mengentheoretischen Limes, der bei analogen formalen Eigenschaften, die er mit dem analytischen Grenzbegriff gemeinsam hat, im Gegensatz zu diesem über den Ordnungstypus ω hinauszugehen gestattet. Daß aber diese unendliche Wiederholung, beispielsweise der Multiplikation durch α^{ω^3}, einer besonderen Definition bedarf und nichts von Hause aus gegebenes ist, wie α^3, tritt gerade in dieser Theorie mit besonderer Deutlichkeit zu Tage, während es für unendliche Summen, Produkte, Kettenbrüche etc. in der Analysis erst das Ergebnis langer und mühevoller kritischer Arbeit war.

Unsere zweite These dürfte auch heute noch auf vielfachen Widerspruch stoßen. Und doch ist es klar, daß es keinen Satz geben kann, der für alle ganzen Zahlen gilt, wenn nicht alle diese ganzen Zahlen als existierend angesehen werden. Und es kann nicht im Ernst behauptet werden, daß die Zahl Zehn erst zu existieren begonnen habe, als man zum erstenmale alle Finger der beiden Hände zu zählen gelernt habe, noch wird man einen Menschen finden können, der schon bis zu einer Billion gezählt hat. Welchen andern Sinn aber soll es haben, wenn man das Zählprinzip als ein Erzeugungsprinzip bezeichnet? Es ist eine unter vielen Methoden und unter diesen logisch die erste, uns eine bestimmte Zahl vor das Bewußtsein zu stellen; die Zahl wird aber dadurch nicht erzeugt. Das Zählprinzip ist ein Ordnungsprinzip. Es ordnet jeder Zahl a eine unmittelbar folgende $a+1$ zu. Und in dieser Form werden wir es in den Kapiteln XXVII und XXIX wieder antreffen.

Sechster Teil.

Prinzipielle Fragen. Zweite Reihe.

XXVII.

Die Wohlordnung der Menge 𝔖.

§ 114. Wir haben gesehen, daß die Erzeugungsprinzipien, durch die wir die Zahlenreihe definieren, zur Begründung ihrer Eigenschafteu unzureichend sind; wir werden auch im weiteren Verlauf bemerken können, daß der Induktionsschluß stets der Definition durch Induktion logisch voran geht. Mit einer Definition durch Induktion, wie sie in dem Erzeugungsprinzip steckt, können wir daher nicht beginnen, ohne bei der Anwendung des Induktionsbeweises zu bemerken, daß wir am falschen Ende angefangen haben.

Nach dem gegenwärtigen Stand der mathematischen Wissenschaft bleibt uns danach nur ein zweites Verfahren, um zu einer dogmatischen Theorie der Menge 𝔖 zu gelangen, d. h. zu einer Theorie, die alle Sätze aus einem einfachen System von Grundsätzen logisch ableitet. Wir müssen auf eine Definition der Zahl verzichten, die Zahl als Grundbegriff betrachten und eine hinreichende und notwendige Zahl evidenter Sätze über den Zahlbegriff als Axiome aufstellen. Dieses Verfahren, nach dem die griechischen Mathematiker die Geometrie und Mechanik systematisch bearbeitet haben, nennt man das axiomatische.

Zu jeder Axiomatik gehört als stillschweigendes Postulat die für den formalistischen Aufbau gleichgültige und daher vielfach übersehene Annahme, daß es Dinge der beschriebenen Art wirk-

lich gibt. Man kann unter Umständen den Nachweis dieser Existenz erbringen, indem man sich auf die Existenz irgend eines anderen Systems von Dingen stützt. Es gibt Zahlengebilde, welche alle diejenigen formalen Eigenschaften besitzen, die wir in der Geometrie an Punkten, Geraden, Ebenen, Strecken, Winkeln etc. voraussetzen. Und wir werden weiter sehen, daß die Existenz von Mengen, welche alle formalen Eigenschaften der Menge $\mathfrak{G}$ besitzen, beweisbar ist, wenn die Existenz transfiniter Mengen überhaupt zugegeben wird. Für diese Existenz ist aber ein logischer Beweis, der allen Bedenken standhielte, bisher nicht erbracht worden. Und man wird vorläufig am besten den Standpunkt einnehmen, daß umgekehrt die Existenz der transfiniten Menge $\mathfrak{G}$ eine Grundtatsache unserer Erkenntnis ist, aus der wir schließen, daß der Begriff einer transfiniten, d. h. einem ihrer Teile äquivalenten Menge keinen Widerspruch enthält.

Einer der interessantesten Versuche, die Existenz transfiniter Mengen zu beweisen, ist der von Dedekind unternommene. Es sei a irgend ein Gegenstand des Denkens, so kann ich das Urteil fällen: a ist ein Gegenstand meines Denkens. Dieses Urteil $\varphi(a)$ ist selbst ein Gegenstand des Denkens. Die Zuordnung φ zwischen a und $\varphi(a)$ ist umkehrbar eindeutig und bildet die Menge aller Gedankendinge auf einen echten Teil ihrer selbst ab, da nicht jeder Gegenstand des Denkens die Form eines Urteils, daher a fortiori nicht die Form des speziellen Urteils $\varphi(a)$ hat. Demnach ist die Menge aller Gedankendinge transfinit.

Angesichts der Paradoxieen, die der Menge aller Dinge anhaften, kann dieser Beweis heute nicht mehr aufrechterhalten werden. Es wird ihm aber auch entgegengehalten, daß er gar nicht rein logisch, sondern auf die durch innere Erfahrung gewonnene Erkenntnis der Organisation unseres Verstandes, also

auf Psychologie gestützt ist. Es wäre in der Tat ein ebenso schlüssiges Verfahren, die Menge 𝔖 selbst als Beweismittel anzuführen, oder, wie wir die Analysis zum Beweis der logischen Möglichkeit nichteuklidischer Geometrieen heranziehen, die Menge aller Punkte eines Halbstrahls als transfinite Menge aufzuzeigen. Ein Irrtum aber wäre es, das Fehlen des rein logischen Charakters als Grund gegen die Zulässigkeit des Beweises anzuführen. Aus reiner Logik Mathematik zu machen, ist bis heute nicht gelungen. Daß es gelingen muß, ist eine unbewiesene Annahme, in den Augen des Kantianers sogar eine falsche. Es ist daher nicht nur ein zulässiger, sondern auch zum mindesten ein durch den Stand unserer Kenntnisse erzwungener Standpunkt, wenn wir sagen: „Aus der Existenz transfiniter Mengen können wir die von 𝔖 beweisen. Daß es aber transfinite Mengen gibt, beweisen gerade diejenigen Erkenntnisse selbst, um deren Darstellung und logische Formulierung wir uns bemühen".

Der mathematische Logizismus mag bestrebt sein, über diesen Standpunkt hinauszukommen; daß wir es heute nicht können, erfahren wir immer von neuem, und den Philosophen setzt das nicht in Erstaunen.

§ 115. Einen axiomatischen Standpunkt haben wir bereits dem allgemeinen Begriff der wohlgeordneten Menge gegenüber eingenommen, indem wir alle ihre Eigenschaften aus dem einen Satz ableiteten, daß jede Teilmenge ein erstes Element besitzt. Den früher gekennzeichneten „naïven" Standpunkt der Theorie des Endlichen gegenüber brachten wir immerhin durch die Behauptung zum Ausdruck, daß alle Abschnitte des Typus ω endlich seien. Dies kann zwar auch aus der Definition von ω als Typus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... der endlichen Zahlen geschlossen

werden, dann ist aber wieder die Wohlordnung dieser Reihe vom naïven Standpunkt aus angenommen. — Wir stellen jetzt folgende Eigenschaften der Menge $\mathfrak{G}$ aller ganzen Zahlen resp. des Typus ω zusammen und benutzen sie als Axiomsystem:

(G). (1) Die Menge $\mathfrak{G}$ ist geordnet.

(2) Sie besitzt ein erstes Element, 1.

(3) Jeder Rest von $\mathfrak{G}$ besitzt ein erstes Element.

(4) Die Menge $\mathfrak{G}$ besitzt kein letztes Element.

(5) Jeder Abschnitt von $\mathfrak{G}$ besitzt ein letztes Element.

Der erste Satz dient den andern als Grundvoraussetzung und tritt daher in unseren Entwicklungen nicht selbständig auf. Von den Axiomen (2) bis (5) enthalten die beiden ersten die Wohlordnung.

Es sei nämlich T eine beliebige Teilmenge und $R(T)$ folgendermaßen definiert: Wenn x ein Element in $R(T)$ ist, so gibt es in T ein Element $y \overline{\lessdot} x$. Die Menge $R(T)$, analog der früher benutzten $\mathsf{A}(T)$ gebildet, ist ein Rest oder mit $\mathfrak{G}$ identisch, da wir hier $\mathfrak{G}$ als uneigentlichen Rest von allen seinen Resten unterscheiden wollen. $R(T)$ besitzt daher ein erstes Element, von dem man sofort zeigt, daß es erstes in T ist. Also enthält jede Teilmenge von $\mathfrak{G}$ ein erstes Element, $\mathfrak{G}$ ist somit wohlgeordnet.

Ist $\mathfrak{H}$ eine von $\mathfrak{G}$ verschiedene Menge, die dem System (G) genügt, so ist daher auch $\mathfrak{H}$ wohlgeordnet, und da es nach (4) kein letztes Element besitzen soll, keinem Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ähnlich. Ebensowenig kann $\mathfrak{G}$ einem Abschnitt von $\mathfrak{H}$ ähnlich sein, es ist daher $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{G}$ selbst ähnlich, d. h. das System (G) definiert den Typus von $\mathfrak{G}$ vollständig.

§ 116. Wir kommen nun zur Begründung des Induktionsschlusses und der Definition durch Induktion. Der Induktionsschluß ist in § 33 bereits allgemein auf die Wohlordnung

gestützt worden. Doch brauchen wir hier das allgemeine Schlußschema nicht vollständig, da nach Axiom (5) jedes Element mit Ausnahme des ersten ein unmittelbar vorangehendes besitzt.

Es sei S eine Menge, von der wir folgendes wissen:

Erstens: sie enthält das Element 1.

Zweitens: enthält sie ein Element x von $\mathfrak{S}$, so enthält sie auch das unmittelbar folgende.

So zeigen wir, daß S alle Elemente von $\mathfrak{S}$ enthält. Wenn es nämlich in $\mathfrak{S}$ Elemente gäbe, die nicht zu S gehören, so gäbe es ein erstes, y, unter ihnen. Dieses ist nach der ersten Annahme über S von 1 verschieden, besitzt darum ein unmittelbar vorangehendes, x. Da y das erste nicht in S enthaltene Element sein soll, ist x noch Element von S, dann aber nach der zweiten Voraussetzung auch y gegen seine Definition. Es gibt also in $\mathfrak{S}$ überhaupt keine Elemente, die nicht zu S gehören.

Die Definition durch Induktion besteht in folgendem: Es sei uns eine Menge M gegeben und in dieser eine Zuordnung Θ, welche jedem Element m von M ein Element $\Theta(m)$ von M eindeutig, aber nicht notwendigerweise umkehrbar eindeutig zuordnet. Dann existiert eine Zuordnung ψ, welche jedem Element a von $\mathfrak{S}$ ein Element $\psi(a)$ von M eindeutig aber wiederum nicht notwendig umkehrbar eindeutig zuordnet. Und zwar ist ψ eindeutig bestimmt durch folgende zwei Festsetzungen:

Erstens: Es ist darüber verfügt, und zwar nach Willkür, welches Element m von M dem Element 1 von $\mathfrak{S}$ zugeordnet sei: $\psi(1) = m$.

Zweitens: Wenn $\psi(a) = r$ ist, so soll dem auf a in $\mathfrak{S}$ folgenden Element a' das Element $\Theta(r)$ in M zugeordnet sein: $\psi(a') = \Theta\psi(a)$.

Der Inhalt dieser Sätze ist vom naiven Standpunkt aus bekannt.

Man bilde aus m die Reihe

$$\Theta(m) = m_2, \quad \Theta(m_2) = m_3, \quad \Theta(m_3) = m_4 \text{ etc.}$$

Die Indices bringen bereits die Zuordnung ψ zum Ausdruck. Das gleiche tut die Exponentenschreibart:

$$m, \ \Theta(m), \quad \Theta^2(m), \quad \Theta^3(m), \ldots \text{etc.}$$

Um unsere Behauptung streng zu beweisen, verwenden wir den Induktionsschluß. Die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, für die ψ definiert ist, enthält 1 und mit a auch a', also enthält sie alle Elemente von $\mathfrak{G}$. Ebenso ergibt sich die Eindeutigkeit der Zuordnung. Und daß es nur eine Zuordnung gibt, die die beiden Forderungen erfüllt, liegt in diesen Forderungen selbst. Es wäre für eine andere Zuordnung $\psi(1) = \gamma(1)$, und aus $\psi(a) = \gamma(a)$ folgt $\psi(a') = \gamma(a')$, also ist allgemein $\psi(a) = \gamma(a)$.

Die Menge $\mathfrak{G}$ selbst besitzt eine Zuordnung φ, die jeden Element das unmittelbar folgende zuordnet. Wir können daher eine Zuordnung ψ durch die Festsetzung

$$\psi(1) = \varphi(a), \quad \psi(b') = \varphi(\psi(b))$$

definieren. Was das ist, erkennen wir sofort, wenn wir für φ und ψ die Zeichen $+1$, $a+$ einführen. Dann lauten unsere Gleichungen $a+1 = a+1$, $a+(b+1) = (a+b)+1$ und ergeben unsere frühere Definition der Addition, auf der sich dann analog die der Multiplikation und Potenzierung aufbauen. Auf diese Art sind daher die Entwicklungen des Kapitels XXVI in einfacher Weise auf eine sichere Grundlage zurückgeführt.

§ 117. Die Zuordnung $\varphi(a) = a+1$ ist nicht nur eindeutig, sondern auch umkehrbar eindeutig. Und da 1 kein unmittelbar vorangehendes Element besitzt, bildet φ die Menge $\mathfrak{G}$ auf einen echten

Teil ihrer selbst, nämlich auf den Rest $R(2)$ ab. $\mathfrak{G}$ ist also transfinit. Wir haben bereits früher, ohne vom naiven Standpunkt auszugehen, gezeigt, daß jede Menge, die eine transfinite Teilmenge besitzt, selbst transfinit ist. Jede Menge, die eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge enthält, ist daher insbesondere selbst transfinit, d. h. sie ist auf einen echten Teil ihrer selbst abbildbar.

Wir haben auch die Umkehrbarkeit dieses Satzes bewiesen, aber wir gingen dabei vom naiven Standpunkt, nämlich von einer Definition durch Induktion aus. Diese wird jetzt nachzuprüfen sein.

Es sei M eine Menge, Θ eine Abbildung, die eindeutig ist und jedem Element m von M ein Element $\Theta(m)$ von M zuordnet. Wir hatten gezeigt, daß eine Zuordnung ψ existiert, welche jedem Element a von $\mathfrak{G}$ ein Element $\psi(a)$ von M zuordnet. Wir setzen jetzt weiter voraus, Θ sei u m k e h r b a r eindeutig und bilde M auf einen echten Teil M' seiner selbst ab. Bei der Bestimmung von ψ stand uns die Wahl von $\psi(1)$ frei. Wir wählen für $\psi(1)$ ein Element von M, das nicht zu M' gehört. Nunmehr läßt sich zeigen, daß auch ψ u m k e h r b a r e i n d e u t i g i s t, d. h. daß M eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge enthält. Es ist die bereits früher betrachtete Menge $m = \psi(1)$, $\Theta(m)$, $\Theta^2(m)$, $\Theta^3(m)$ etc.

Es sei a ein Element in $\mathfrak{G}$, $\psi(a) = r$. Gibt es ein von a verschiedenes Element b von $\mathfrak{G}$, für das $\psi(b) = \psi(a)$ wird, so rechnen wir a zu einer Teilmenge T von $\mathfrak{G}$; andernfalls zu der komplementären Menge S. Diese Menge S enthält sicher das Element 1. Denn sei a ein von 1 verschiedenes Element, so gibt es ein unmittelbar vorangehendes b, und es ist $\psi(a) = \Theta\psi(b)$. Nun ist $\psi(1) = m$ nicht in M' enthalten, d. h. es gibt in M kein Element x, für das $m = \Theta(x)$ wäre. Aus $\psi(1) = \psi(a)$ würde aber im Widerspruch damit $m = \Theta(\psi(b))$ folgen. Also kann $\psi(1) = \psi(a)$ nur für $a = 1$ möglich sein.

Es sei ferner a ein beliebiges Element in S, a' das unmittelbar folgende. Ist $\psi(a') = \psi(b)$, so ist b sicher von 1 verschieden, besitzt also ein vorangehendes Element c, $b = c+1$. Es ist aber $\psi(a') = \Theta\psi(a)$, $\psi(b) = \Theta\psi(c)$. Da Θ umkehrbar eindeutig ist, folgt daher aus $\psi(a') = \psi(b)$ sofort weiter $\psi(a) = \psi(c)$, und da a zu S gehören soll, $a = c$, d. h. $a' = c+1 = b$. D. h. aus $\psi(a') = \psi(b)$ folgt $a' = b$: gehört a zu S, so auch das unmittelbar folgende Element. Demnach enthält nach dem Induktionsschluß S alle Elemente von $\mathfrak{S}$, d. h. aus $\psi(a) = \psi(b)$ folgt stets $a = b$, ψ ist umkehrbar eindeutig und M enthält eine zu $\mathfrak{S}$ äquivalente Teilmenge, w. z. b. w. —

Unser Beweis unterscheidet sich von dem früher gegebenen nur durch die schärfere Darstellung.

§ 118. Wir kommen jetzt zum Beweise eines Satzes, den wir früher vom naiven Standpunkt aus unbewiesen hingenommen haben, zu dem Satz nämlich, daß kein Abschnitt von $\mathfrak{S}$ unendlich ist. Wir beweisen ihn in zwei Schritten.

Kein Abschnitt von $\mathfrak{S}$ ist transfinit.

Der Satz ist sicher richtig für den Abschnitt $A(2)$. Dieser besteht nämlich aus einem Element, der Eins. Er enthält daher gar keinen echten Teil, kann daher auch keinem echten Teil seiner selbt äquivalent sein.

Sodann beweisen wir, daß der Satz richtig ist für $A(m+1)$, wenn er für den Abschnitt $A(m)$ richtig ist. Zur Vorbereitung beachten wir, daß alle Reste von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S}$ äquivalent sind. Da nämlich $\mathfrak{S}$ geordnet ist, ist auch jede Teilmenge geordnet, und da die Ordnung von $\mathfrak{S}$ eine Wohlordnung ist, gilt dies auch von der jeder Teilmenge, speziell von der jedes Restes. Jeder Rest von $\mathfrak{S}$ erfüllt darum die Axiome 1, 2, 3. Ist weiter r ein Abschnitt

eines Restes R, so gibt es in R Elemente, die nach allen Elementen von τ kommen, sofern τ ein echter Abschnitt ist. Diese Elemente sind daher auch hinter alle Elemente von $\mathsf{A}(\tau)$ geordnet, $\mathsf{A}(\tau)$ ist darum echter Abschnitt von $\mathfrak{G}$. Nach Axiom 5 enthält somit $\mathsf{A}(\tau)$ und damit τ selbst ein letztes Element. R genügt daher auch dem Axiom (5), und aus Axiom (4) folgt ja sofort, daß kein Rest von $\mathfrak{G}$, also auch R nicht, ein letztes Element besitzen kann. Jeder Rest von $\mathfrak{G}$ genügt also den Axiomen von $\mathfrak{G}$, und ist daher zu $\mathfrak{G}$ ähnlich, d. h. a fortiori äquivalent.

Es sei nun bewiesen, daß der Abschnitt $A(m)$ nicht transfinit ist. Wäre $A(m+1)$ transfinit, so enthielte $A(m+1)$ eine zu $\mathfrak{G}$ äquivalente Teilmenge τ, nach § 117. Enthielte τ das Element m nicht, so gehörten alle Elemente von τ zu $A(m)$, da ja $A(m+1)$ aus $A(m)$ und m selbst besteht. Das wäre aber gegen die Voraussetzung, da $A(m)$ nicht transfinit ist.

Die Zuordnung, welche τ auf $\mathfrak{G}$ abbildet, heiße ψ, und es sei $m = \psi(a)$. Betrachten wir jetzt diejenigen Elemente von τ, welche dem Rest $R(a+1)$ zugeordnet sind. Sie bilden eine Teilmenge τ', die m nicht enthält, also Teil von $A(m)$ ist. Sie ist zu $R(a+1)$, d. h. zu einem Rest von $\mathfrak{G}$, somit zu $\mathfrak{G}$ selbst äquivalent, wiederum gegen die Voraussetzung. Die Annahme, daß $A(m+1)$ transfinit sei, führt daher auf einen Widerspruch[1].

Die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Abschnitte nicht transfinit sind, enthält daher 1 und mit m auch $m+1$, d. h. sie ist mit $\mathfrak{G}$ identisch, w. z. b. w. —

---

[1] Ein anderer Beweis findet sich bei Dedekind „Was sind und was sollen die Zahlen?“ § 70, 119.

§ 119. Der zweite Schritt unseres Beweises erledigt die Frage, die sich an die Disjunktion endlich-unendlich geknüpft hat und besteht in dem Nachweis, daß jede Menge entweder transfinit oder zu einem Abschnitt von 𝔖 äquivalent ist. Bei diesem Verfahren ist die völlige Umkehrung des naiven Standpunktes charakteristisch: Wir definierten zuerst durch eine positive Eigenschaft das unendliche in der Fassung des transfiniten. Sodann wiesen wir nach, daß die sogenannten endlichen Zahlen nicht-transfinit sind. Zum Schlusse zeigen wir jetzt, daß die endlichen Zahlen die einzigen nicht-transfiniten sind, woraus dann folgt, daß die Begriffe nicht-endlich und transfinit sich decken. —

Wir machen mit Dedekind folgende Disjunktion: Eine Menge M enthält entweder zu jedem Abschnitt von 𝔖 eine äquivalente Teilmenge, oder nicht zu jedem.

Wir betrachten den ersten Fall. Zu dem Abschnitt $A(a)$ gebe es in M die äquivalente Teilmenge τ_a. Die Zuordnung überträgt zugleich die Ordnung von $A(a)$ auf τ_a. Daher ist τ_a wohlgeordnet, so zwar, daß jeder Abschnitt und τ_a selbst ein letztes Element besitzt.

Zwei Abschnitte von 𝔖 sind niemals äquivalent, da einer ein Abschnitt des andern ist, dieser also transfinit sein müßte. Daher sind auch keine zwei der Teilmengen τ_a äquivalent, umsoweniger identisch: die Zuordnung der Teilmenge τ_a zu ihrem Index ist umkehrbar eindeutig. Die Menge τ dieser Teilmengen ist daher zu 𝔖 äquivalent und durch die Indices nach dem Typus ω wohlgeordnet.

Wir definieren nun folgende Teilmenge M' von M: Ist x ein Element von M', so gibt es eine Teilmenge τ_a, welche x enthält. Es kann mehrere solche Teilmengen geben;

auf Grund der Wohlordnung von τ ist eine darunter die erste. Ihr Index sei ξ und werde mit $\varphi(x)$ bezeichnet.

Die Menge M' wird durch folgende Vorschrift geordnet: Sind x, y zwei Elemente von M', so ist entweder $\varphi(x)$ von $\varphi(y)$ verschieden und alsdann $\varphi(x) \succ \varphi(y)$ oder $\varphi(x) \prec \varphi(y)$. Im ersten Fall sei $x \succ y$, im zweiten $x \prec y$. Oder es ist $\varphi(x) = \varphi(y) = \xi$, so gehören x und y einer gemeinsamen Teilmenge τ_ξ aus τ an und sind durch deren Wohlordnung bereits geordnet.

Wir beweisen weiter, daß diese Ordnung den Axiomen 2 bis 5 genügt, d. h. daß M' zu $\mathfrak{S}$ ähnlich ist. Daraus folgt dann, daß M eine zu $\mathfrak{S}$ äquivalente, also transfinite Teilmenge enthält, mithin selbst transfinit ist.

Axiom (2) und (3) beweisen wir zusammen aus der allgemeinen Definition der Wohlordnung. Eine Teilmenge M'' von M' definiert eine Teilmenge $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$. Gibt es nämlich in M'' ein Element x, für das $\varphi(x) = a$ ist, so rechnet a zu $\mathfrak{S}'$. Unter den Elementen von $\mathfrak{S}'$ gibt es ein erstes; es heiße a. In τ_a wieder gibt es Elemente, die nach M'' gehören, und unter diesen ein erstes; es heiße x. Man zeigt sofort, daß x erstes Element in M'' ist. Also enthält jede Teilmenge von M' ein erstes Element, ist somit selbst wohlgeordnet.

Zum Beweise von Axiom (5) betrachten wir einen Abschnitt N von M'. Er ist auf Grund der soeben bewiesenen Wohlordnung von einem Element x in M' erzeugt. Für jedes Element y in N ist daher $\varphi(y) \overline{\lessdot} \varphi(x)$. Es gibt aber unter den Indices $\varphi(y)$ einen höchsten, der höchstens gleich $\varphi(x)$ ist. Er heiße ξ. In der Teilmenge τ_ξ gibt es wieder ein letztes Element z, für das $\varphi(z) = \xi$ und, falls $\xi = \varphi(x)$, auch $z \prec x$ ist. Dieses Element ist letztes in N.

Um endlich die Gültigkeit des Axioms (4) für die Menge M' nachzuweisen, nehmen wir an, es gebe in M' ein letztes Element. Es würde daraus folgen, daß M' einem Abschnitt $A(c)$ von $\mathfrak{G}$ ähnlich wäre. Nun ist die Teilmenge τ_{c+1} äquivalent $A(c+1)$, andererseits Teil von M', woraus folgen würde, daß $A(c+1)$ einem Teil von $A(c)$, also einem Teil seiner selbst äquivalent wäre. Dies ist unmöglich, somit enthält M' kein letztes Element; es ist daher zu $\mathfrak{G}$ äquivalent, w. z. b. w. —

Der Grundgedanke unseres Beweises ist ein ganz einfacher. Man setze die Teilmengen τ_1, τ_2, τ_3, ... hintereinander und streiche aus der so entstandenen Reihe jedes Element, das mehrfach vorkommt, an allen Stellen weg mit Ausnahme derjenigen, an der es zuerst auftritt. Die übrigbleibende Reihe ist unsere Menge M' und hat offenbar den Typus ω. Diese einfache Darstellung entspricht aber den hier gestellten Anforderungen an Strenge nicht; daher mußte das Hintereinandersetzen und Wegstreichen durch die schärfere Definition und einen ausführlichen Beweis der Ordnung von M' nach dem Typus ω ersetzt werden.

§ 120. Sehr viel einfacher erledigt sich der zweite Fall unserer Disjunktion: Es gebe in M nicht zu jedem Abschnitt von $\mathfrak{G}$ eine äquivalente Teilmenge. Dann gibt es unter denjenigen Abschnitten in $\mathfrak{G}$, die keine äquivalenten Teile in M besitzen, einen ersten, $A(c)$, zu c ein unmittelbar vorangehendes Element b, und zu $A(b)$ einen äquivalenten Teil M' in M. Wäre M' ein echter Teil in M, so gäbe es ein nicht zu M' gehöriges Element x in M. Dieses ordne man dem Element b zu, so ist durch $A(b) \sim M'$ und $b \sim x$ dem Abschnitt $A(c) = A(b) + b$ in M eine äquivalente Teilmenge $(M' + x)$ zugeordnet, gegen die Voraussetzung. Demnach ist M' kein echter Teil von M, vielmehr $M' = M$ und

$M \sim A(b)$, d. h. M ist einem Abschnitt von $\mathfrak{S}$ äquivalent und endlich.

Hiermit ist die in § 14 aufgeworfene Frage beantwortet, deren Erledigung vom naiven Standpunkt aus schlechterdings ausgeschlossen war. Wir müssen dabei hervorheben, daß unser Beweis kein Kriterium enthält, nach dem von einer gegebenen Menge entschieden werden kann, ob sie endlich oder unendlich ist. Wenn uns durch einen Grenzprozeß eine Zahl definiert wird, so können wir fragen, ob sie rational oder irrational ist. Im ersten Fall ist die Menge der Nenner ihrer Kettenbruchentwicklung oder der von null verschiedenen Ziffern ihrer Dezimalbruchentwicklung endlich, im zweiten Fall unendlich. Wir haben hier ein Problem vor uns, bei dem die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit einer Menge aufgeworfen wird und in manchen Fällen bis heute noch unentschieden ist. Auch das Problem des großen Fermatschen Satzes gibt zu einer solchen Frage Anlaß: Ist die Menge aller Zahlen m, für die die Gleichung $x^m + y^m = z^m$ in ganzen Zahlen lösbar ist, unendlich oder, wie vermutet wird, endlich? Eine andere bekannte zahlentheoretische Frage betrifft die Menge aller Zahlen x, für die $2^{2^x} + 1$ eine Primzahl ist. Auch von dieser Menge ist unentschieden, ob sie endlich oder unendlich ist. —

§ 121. Im Anschlusse an die Axiomatik der ersten Zahlklasse mag noch gezeigt werden, daß auch die zweite Zahlklasse, d. h. der Typus Ω_1, axiomatisch behandelt werden kann. Wir stellen zu diesem Zweck wieder die drei ersten Axiome der Wohlordnung auf, an Stelle des vierten und fünften aber treten folgende analoge Bildungen, in denen die Menge mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet wird:

(4*) Die Menge $\mathfrak{H}$ besitzt keinen Kern, dessen Abschnitte sämtlich ein letztes Element haben.

(5*) Jeder Abschnitt von $\mathfrak{H}$ besitzt einen Kern, von der Eigenschaft, daß jeder Abschnitt desselben ein letztes Element hat.

Diese Axiome sagen aus, daß jeder Abschnitt einen Kern vom Typus ω oder einen endlichen Kern hat, die Menge selbst nicht. Daraus folgt wieder wie im § 115, daß jede Menge, die dem gleichen Axiomsystem genügt, zu $\mathfrak{H}$ ähnlich ist, daß also der Ordnungstypus Ω_1 wirklich eindeutig definiert ist. Eine Anwendung dieses Axiomsystems ist mir nicht bekannt; aber es gibt auch bisher keine für die zweite Zahlenklasse allein charakteristischen Sätze, ausgenommen die Abzählbarkeit ihrer Abschnitte. Diese folgert man leicht aus (4*) und dem Satz, daß eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist. —

XXVIII.

Ordnende Teilmengensysteme.

§ 122. Bei der Begründung der Ordnung transfiniter Zahlen war es unser Bestreben, diese Ordnung auf die Teilung und Vergleichung zurückzuführen. Man kann mit Recht verlangen, daß dieses Bestreben auch auf die Ordnung einer geordneten Menge selbst angewandt werde. Das ist auch leicht durchführbar, doch wird dadurch ein wenig übersichtlicher Ausgangspunkt gewonnen, und es würde sich nicht verlohnen, diesen Schritt rückwärts auszuführen, wenn wir nicht bei zwei wichtigen Untersuchungen diese Einführung der Ordnung vermittelst einer besonderen Teilung anträfen.

Eine geordnete Menge besitzt zwei besondere Arten von Teilmengen: die Abschnitte und die Reste. Ein Abschnitt ist dadurch charakterisiert, daß er mit jedem Element auch alle vorangehenden enthält; ein Rest enthält alle Elemente, die aut eines seiner Elemente folgen. Die Menge selbst kann sowohl zu den Abschnitten wie zu den Resten gerechnet werden. Bei den wohlgeordneten Mengen vermieden wir das erstere und ließen das zweite zu. Im folgenden treffen wir keinerlei Festsetzung, nennen aber alle von M verschiedenen Abschnitte und Reste „echte" Abschnitte und Reste, die Menge selbst, wenn wir sie dazu rechnen, „unecht". —

Die Namen „Abschnitt" und „Rest" richten sich nach der Bezeichnung der Ordnung, und diese liegt in unserer Willkür, da wir sie umkehren können, ohne den Formalismus irgendwie zu ändern. Wir können das Zeichen $\prec$ durch irgend ein anderes, auch durch $\succ$ ersetzen, sofern wir nur gleichzeitig das Zeichen $\succ$ gegen ein anderes, etwa $\prec$, austauschen. Es schlösse auch ersichtlich keinen Widerspruch ein, wenn wir von zwei Zahlen die größere als die „frühere" bezeichnen wollten; es entspräche nur nicht dem Sprachgebrauch. Beachten wir diesen Dualismus, so ist von vornherein klar, daß jedem Satz über Abschnitte einer über Reste entsprechen muß, wie es bereits die Definition erkennen läßt.

Die Menge A aller Abschnitte einer geordneten Menge M besitzt folgende Eigenschaft:

(A) Sind A, A' zwei zu A gehörige Mengen, so gibt es nicht gleichzeitig in A ein nicht zu A' und in A' ein nicht zu A gehöriges Element. Das heißt: entweder ist A mit A' identisch oder A' echter Teil von A oder A echter Teil von A'.

Ein analoges Verhalten zeigt eine Schaar konzentrischer Kreise; von zweien derselben ist stets einer ganz in dem andern gelegen. Obwohl der Vergleich nicht in allen Punkten zutrifft, wollen wir doch ein System A von Mengen, welches der Forderung (A) genügt, ein konzentrisches System nennen, um einen kurzen Ausdruck zu besitzen. Es ist klar, daß ein konzentrisches System geordnet ist. Bezeichnen wir mit $A' \prec A$ den Fall, daß A' echter Teil von A ist, so schließen sich die drei Fälle $A' \prec A$, $A' = A$, $A \prec A'$ logisch aus und einer findet notwendigerweise statt. Diese Ordnung stützt sich genau wie in früheren Erörterungen auf die Disjunktion VIII, und zwar ist hierbei die Vergleichung durch den speziellen Fall der Identität ersetzt.

Die Menge aller Reste einer geordneten Menge ist ebenfalls konzentrisch. Aber es ist klar, daß diese Eigenschaft für sich allein weder die Menge aller Abschnitte noch die aller Reste auszeichnet. Z. B. bildet eine Menge M mit einer ihrer eigentlichen Teilmengen zusammen bereits ein konzentrisches System, ebenso ist jedes Teilsystem eines konzentrischen selbst konzentrisch.

§ 123. Wenn x, y zwei Elemente von M sind und $x \prec y$ ist, so ist x in $A(y)$ enthalten, y dagegen nicht. Diese Eigenschaft des Systems A ist unabhängig von der zuerst beschriebenen. Wir formulieren sie folgendermaßen:

(B) Sind x, y zwei Elemente, welche sich in Mengen des Systems A vorfinden, so findet sich eines von beiden in einer Menge A des Systems vor, die das andere nicht enthält.

Dieser Bedingung genügt unter anderem die Menge aller Teilmengen von M, die nicht konzentrisch ist.

Wenn an einem System A die *beiden* Eigenschaften (A), (B) sich vorfinden, so wollen wir es ein *ordnendes* System nennen, weil alle zu seinen Mengen gehörigen Elemente geordnet sind. Es sei nämlich x von y verschieden, x in A, y aber nicht in A. Dafür schreiben wir kurz: $x \prec y$. Wäre gleichzeitig $x \succ y$, so müßte es eine Menge geben, die y enthält und x nicht enthält. Das ist aber gerade durch (A) ausgeschlossen. Demnach besteht eine und *nur* eine der drei Beziehungen $x \prec y$, $x = y$, $x \succ y$. Ist insbesondere $x \prec y$, $y \prec z$, so gibt es eine Menge A, die x enthält, y nicht, eine Menge B, die y enthält, z nicht. B enthält x, da sonst auch $y \prec x$ wäre. Demnach ist $x \prec z$. Es ist darum in der Tat die Menge aller Elemente, die Mengen des Systems angehören, geordnet.

Auch hiermit sind nicht alle charakteristischen Eigenschaften der Menge *aller* Abschnitte von M erschöpft. So bilden z. B. die Abschnitte des Kontinuums, welche zu rationalen Zahlen gehören, ein ordnendes System, aber nicht das System aller Abschnitte des Kontinuums. Wenn man ferner aus der Menge aller Abschnitte einer wohlgeordneten Menge alle diejenigen wegläßt, welche zu Limeselementen gehören, bilden die übrigbleibenden immer noch ein ordnendes System.

Wir haben die Beziehung, „x in A, y nicht in A“ mit dem Zeichen $x \prec y$ dargestellt. Hierdurch werden die Mengen des Systems A zu Abschnitten von M in der definierten Ordnung. Hätten wir das Zeichen $x \succ y$ gewählt, so wäre A ein ordnendes System von Resten der Menge M geworden. In diesem Fall empfiehlt es sich, schon die Beziehung: „A ist Teil von B“ mit $A \succ B$ zu bezeichnen oder überhaupt ein anderes Zeichen für sie zu verwenden[1].

---

[1] Dedekind schweift das Zeichen $\prec$ so stark, daß es die Form einer 3 annimmt. $A\,3\,B$ heißt: A ist Teil von B. (Was sind und was sollen die Zahlen?)

§ 124. Das Kriterium (B) ist so formuliert, daß von der Menge M, in der jede Menge des Systems A enthalten ist, nicht gesprochen wird. Diese Einschränkung bedingt eine gewisse Vorsicht. Es kann ein System von Teilmengen in M ordnend sein, ohne M selbst zu ordnen. Z. B. ein ordnendes System gerader Zahlen ordnet nur diese, nicht die Menge 𝔖 aller Zahlen. Wenn die Menge M von dem System A geordnet werden soll, so muß jedes Element von M in einer Menge des Systems vorkommen. Und soll A aus lauter Teilmengen von M bestehen, so muß auch umgekehrt jedes Element einer Menge A des Systems in M vorkommen. Durch diese Bedingungen ist M völlig definiert: Es enthält alle Elemente der Mengen A von A und nur diese, es ist die Vereinigungsmenge des Systems A. Den Begriff der Vereinigungsmenge lernten wir bereits beim mengentheoretischen Kalkul kennen, aber nur in spezieller Anwendung auf Systeme teilfremder Mengen.

Wenn die Vereinigungsmenge eines ordnenden Systems A ein erstes Element enthält, so ist dies allen Mengen des Systems gemeinsam. Und existiert ein Element x, welches allen Mengen des Systems gemeinsam ist, so ist es das einzige dieser Art und erstes der Vereinigungsmenge. Denn ist y ein anderes Element, so muß es ja eine Menge im System geben, die y nicht enthält, da eine Menge, die y enthält und x nicht enthielte, ausgeschlossen ist.

Enthält M ein letztes Element, so ist dies in keiner Menge des Systems enthalten, die echter Teil von M ist. Daraus folgt, daß M selbst Menge des Systems sein muß. Ist umgekehrt ein Element vorhanden, das nur in einer Menge des Systems vorkommt, so ist diese Menge die Vereinigungsmenge des Systems und das Element letztes derselben.

Wenn A irgend ein Abschnitt von M ist, (der n i c h t zum ordnenden System A zu gehören braucht), so bildet die Menge aller zu A gehörigen Teilmengen von A ein ordnendes System [1]. Denn wenn $x \prec y$ zwei Elemente von A sind und B eine Menge des Systems A, welche x enthält und y nicht, so ist B echter Teil von A, da A nicht Teil von B sein kann (y in A, nicht in B).

Wenn der komplementäre Rest von A ein erstes, also A ein unmittelbar folgendes Element besitzt, so ist dieses allen Abschnitten von M, insbesondere allen zu A gehörigen, gemeinsam, welche A als echten Teil enthalten. Es sei umgekehrt N die Menge aller zu A gehörigen Abschnitte von M, die A als echten Teil enthalten, wobei A nicht selbst zu A zu gehören braucht; alle zu N gehörigen Abschnitte haben sämtliche Elemente von A gemeinsam. Haben sie noch ein n i c h t zu A gehöriges Element x gemeinsam, so ist dieses das einzige seiner Art und unmittelbar auf A folgendes Element.

Es gebe nämlich ein zweites, y, von gleicher Art, und es sei $x \prec y$; B sei eine zu A gehörige Teilmenge, die x enthält und y nicht. Dann kann B nicht zu N gehören, da es y nicht enthält. A ist aber echter Teil von B, weil x in B und nicht in A enthalten ist; das ist unmöglich. Daher ist x einziges Element seiner Art. Es gibt darum kein Element unter x, das nicht in A wäre, da es sonst allen Abschnitten $B \succ A$ gemeinsam wäre, d. h. x ist unmittelbar folgendes Element zu A, $A = A(x)$.

Besonders einfach liegt der Fall, wenn es in N einen ersten Abschnitt A' gibt. Jedes seiner Elemente ist allen folgenden Ab-

[1] Die Vereinigungsmenge dieses Systems wird im allgemeinen mit A übereinstimmen, kann aber auch ein Element weniger enthalten, als A; dieses ist dann letztes in A, und A gehört nicht zum System A.

schnitten gemeinsam, und er enthält, da A echter Teil von A' sein soll, ein nicht in A vorhandenes Element x und nur eines. Gibt es also zu A in A einen unmittelbar folgenden Abschnitt, so ist dieser überhaupt der nächste Abschnitt $A + x$ nach A und x das auf A unmittelbar folgende Element.

§ 125. Wenn M wohlgeordnet ist, so ist sowohl A als Menge von Abschnitten von M wohlgeordnet, wie auch jeder einzelne, zu A gehörige Abschnitt von M. Diese einfache Tatsache läßt sich auf zwei Arten umkehren:

LXXIII. Ist ein ordnendes System wohlgeordnet, so ist auch seine Vereinigungsmenge wohlgeordnet.

Ist A wohlgeordnet, so gibt es eine erste Menge, die zu A gehört, und ist a ein Element in ihr, so ist es allen andern Mengen des Systems gemeinsam, daher einziges seiner Art und erstes in M.

Ist ferner A ein Abschnitt von M, der nicht zu dem System zu gehören braucht, N die Menge aller zu A gehörigen Abschnitte $B \succ A$, so enthält N ein erstes Element, A', auf Grund der Wohlordnung von A. Daraus folgt, wie wir im vorhergehenden Paragraphen sahen, daß A ein unmittelbar folgendes Element besitzt. Da M ein erstes und jeder Abschnitt von M ein unmittelbar folgendes Element besitzt, ist M wohlgeordnet, w. z. b. w. Zugleich sieht man, daß die einzigen Abschnitte von M, die nicht zu A zu gehören brauchen, diejenigen sind, die keinen unmittelbar vorhergehenden Abschnitt, d. h. kein letztes Element besitzen.

LXXIV. Besteht ein ordnendes System A aus lauter wohlgeordneten Mengen, derart, daß jede Menge Abschnitt jeder andern ist, von der

sie ein echter Teil ist, so ist die Vereinigungsmenge von A wohlgeordnet.

Es sei B eine Menge des Systems, so gibt es unter den Mengen $A \prec B$, weil sie alle Abschnitte der wohlgeordneten Menge B sind, eine erste. Diese ist erste von A überhaupt.

Sei ferner N ein Rest von A und B eine zu N gehörige Menge von A. Unter den zu N gehörigen Abschnitten von B ist einer der erste und damit erste Menge in N überhaupt.

Es besitzt also A selbst und jeder seiner Reste ein erstes Element, danach ist A und nach dem vorangehenden Satze auch seine Vereinigungsmenge wohlgeordnet.

§ 126. Wir haben bisher nicht vorausgesetzt, daß die Menge A auch alle Abschnitte ihrer Vereinigungsmenge enthalte. Wir haben uns im Gegenteil überzeugt, daß ein ordnendes System nicht notwendig aus allen Abschnitten der von ihm erzeugten Ordnung zu bestehen braucht.

Wir wollen nun die Bedingung dafür aufsuchen, daß ein ordnendes System A vollständig ist, d. h. daß es auch alle Abschnitte seiner Vereinigungsmenge enthält. Zu diesem Zweck denken wir uns einen von A verschiedenen Abschnitt M des Systems; seine Vereinigungsmenge heiße M_1. Ist also x ein Element von M_1, so gibt es in M eine Menge A des Systems, die x enthält. Ist $y \prec x$, so ist auch y in A enthalten, demnach ist y in M_1, d. h. M_1 enthält mit jedem seiner Elemente auch alle vorangehenden, es ist ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M von A. Wenn also A ein vollständiges System ist, so muß es die Vereinigungsmenge jedes seiner Abschnitte enthalten.

Nunmehr betrachten wir den zu M komplementären Rest N und „seinen größten gemeinsamen Teil“, das ist die

Menge N aller Elemente, die allen zu N gehörigen Mengen des Systems A gemeinsam sind. Ist x ein Element in N, so ist es Element jeder zu N gehörigen Menge; das gleiche gilt a fortiori von jedem Element $y \prec x$, d. h. N ist ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M. Ist also A vollständig, so muß auch der größte gemeinsame Teil jedes seiner Reste zu ihm gehören.

Die beiden Bedingungen der Vollständigkeit sind hinreichend. Es sei nämlich A ein unvollständiges System, L ein Abschnitt der Vereinigungsmenge M, der nicht zu A gehört, M die Menge aller Elemente $A \prec L$ von A, N die Menge aller Elemente $B \succ L$ von A. M ist ein Abschnitt von A, N der komplementäre Rest, M_1 sei Vereinigungsmenge von M, N größter Teil von N. Dann gehört jedes Element von M_1 zu L, jedes Element von L zu N, d. h. es ist $M_1 \leqq L \leqq N$. Ist insbesondere, was eintreten kann, $M_1 = N$, so ist auch $L = M_1 = N$. Ist aber M_1 von N verschieden, so sei x ein Element in N, das nicht zu M_1 gehört. Es ist das einzige seiner Art, denn gäbe es ein zweites, $y \succ x$, und sei A ein zu A gehöriger Abschnitt, der x enthält, aber y nicht, so wäre $A \succ M$ und $A \prec N$, also A weder in M noch N, was unmöglich ist. Es ist also, falls M_1 und N verschieden sind, $N = M_1 + x$, daher L entweder mit M_1 oder mit N identisch.

Wenn nun A sowohl M_1 als N enthielte, so müßte es auch notwendig L enthalten, gegen die Annahme. Damit erkennen wir, daß unsere beiden Bedingungen der Vollständigkeit zusammen hinreichend sind. Ein einfaches Beispiel mag uns zeigen, daß auch jede von ihnen notwendig ist, daß eine allein nicht genügt. Wir nehmen die unendliche Reihe der rationalen Zahlen $a_1 = 0{,}9$, $a_2 = 0{,}99$, $a_3 = 0{,}999$ etc., ferner die nicht in ihr enthaltene Zahl 1 und sodann wieder die Reihe $b_1 = 1{,}1$, $b_2 = 1{,}01$, $b_3 = 1{,}001$,

etc., so daß stets $a_n + b_n = 2$ ist. Wenn wir diese Zahlen der Größe nach ordnen, so entsteht die Reihe

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999 \ldots 1; \ldots 1{,}0001;\ 1001;\ 1{,}01;\ 1{,}1.$$

Sie beginnt mit dem Typus ω; auf diesen folgt ein isoliertes Element, 1, und an dieses schließt sich der Typus $\bar{\omega}$ an.

Die Menge besitzt folgende Arten Abschnitte: 1) Abschnitte erster Art im Typus ω, $A(x)$, x in der Reihe a_n; sie besitzen alle ein letztes und ein folgendes Element. 2) Abschnitte zweiter Art im Typus $\bar{\omega}$, $A(x)$, x in der Reihe b_n. Auch diese besitzen ein letztes und ein unmittelbar folgendes Element. 3) Abschnitt $A(1)$, ohne letztes, mit unmittelbar folgendem Element. 4) Abschnitt $\mathsf{A}(1)$, enthält 1 als letztes und kein unmittelbar folgendes Element.

Die Abschnitte erster und zweiter Art bilden zusammen ein ordnendes System Σ; es ist aber nicht vollständig. Dies zeigt sich in der Tat auch an unserem Kriterium. Die Abschnitte erster Art bilden einen Abschnitt M von Σ, dessen Vereinigungsmenge $A(1)$ dem System Σ nicht angehört. Die Abschnitte zweiter Art bilden einen Rest N von Σ, dessen größter Teil $\mathsf{A}(1)$ ebensowenig Σ angehört. Jeder andere Abschnitt unseres Systems dagegen genügt unseren Anforderungen. Fügen wir daher $A(1)$ dem System hinzu, so enthält das System zu jedem seiner Abschnitte die Vereinigungsmenge, auch zu dem neu hinzukommenden $\mathsf{M} + A(1)$, nicht aber den größten Teil von N. Und fügt man $\mathsf{A}(1)$ hinzu, so enthält das System zu jedem seiner Reste, auch zu $\mathsf{A}(1) + \mathsf{N}$, den größten Teil, aber zu M nicht die Vereinigungsmenge. Es sind daher in der Tat beide Vorschriften erforderlich:

LXXV. Ein ordnendes System A ist dann und nur dann vollständig, wenn sowohl die Vereinigungsmenge jedes Abschnittes, wie der

größte gemeinsame Teil jedes Restes von A ein Element von A ist.

Jede Teilmenge T von A bestimmt einen Abschnitt A(T) und einen Rest R(T); A(T) enthält alle zu T gehörigen Elemente und alle diesen vorangehenden; R(T) alle zu T gehörigen und alle folgenden. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Vereinigungsmenge von A(T) mit der von T übereinstimmt. Ist nämlich x in $S \prec T$ und T in T, so ist x in T selbst. Und ebenso ist der größte Teil von R(T) gleich dem größten Teil von T selbst. Es kann also unsere Bedingung der Vollständigkeit in folgende allgemeine Fassung gebracht werden:

LXXVa. Ein ordnendes System A ist dann und nur dann vollständig, wenn es sowohl die Vereinigungsmenge als auch den größten Teiler jeder seiner Teilmengen enthält.

Diese Fassung hat allerdings die unwesentliche Folge, daß die Vereinigungsmenge des Systems selbst zu dem System gehören muß, da sowohl A(T) wie R(T) mit A selbst identisch sein kann. Man kann sie aber jederzeit dem System hinzufügen, falls sie ihm noch nicht angehören sollte.

§ 127. Der zuletzt ausgesprochene Satz spricht nicht mehr von Resten und Abschnitten des Systems und ist daher in seiner Fassung unabhängig davon, ob wir A als Menge der Abschnitte oder der Reste von M betrachten. In Rücksicht darauf, daß wir bei den vorangehenden Betrachtungen stets die Auffassung als Abschnittmenge bevorzugt haben, im folgenden Kapitel aber ein Restesystem betrachten müssen, ist es vielleicht angezeigt, die Umänderung der Definitionen des ersten resp. unmittelbar vorangehenden Elementes kurz anzugeben:

Sei A ein ordnendes Restesystem seiner Vereinigungsmenge M. Ein Rest R besitzt ein Element x als erstes, wenn dieses in keinem echten zu A gehörigen Teil von R enthalten ist. Ein Rest R besitzt ein unmittelbar vorangehendes Element, wenn es ein Element x gibt, das nicht in R, aber in jeder Menge des System A enthalten ist, von der R echter Teil ist. Dieser letzten Aussage wollen wir für den Fall, daß R dem System A angehört, noch eine kürzere Fassung geben:

Ist R in A, $(R+x)$ in A, x nicht in R, so ist x unmittelbar vorangehendes Element zu R.

In der Tat, ist y von x verschieden und nicht in R, so ist auch y nicht in $(R+x)$ enthalten, die Menge $(R+x)$ des Systems enthält also x, aber nicht y, wofür $y \prec x$ zu schreiben ist, da wir hier ein Restesystem betrachten.

Die Betrachtungen dieses Kapitels leiden an einer gewissen Schwerfälligkeit, nehmen aber diejenigen allgemeinen Beziehungen vorweg, die in den folgenden Kapiteln zur Anwendung gelangen. Dadurch werden diese eine größere Durchsichtigkeit gewinnen.

XXIX.

Dedekinds Theorie der ganzen Zahlen.

§ 128. Wir haben im vorangehenden Kapitel gesehen, daß Ordnungspostulate einer Menge durch Teilungspostulate ersetzt werden können. Es ist dieser Ersatz insofern erstrebenswert, als wir ja auch die Ordnung der transfiniten Zahlen auf Teilpostulate zurückführten. Andererseits ist leicht zu sehen, daß unser Axiomsystem (G) eine außerordentlich schwerfällige Form annehmen würde, wenn wir es in Teilungspostulaten aussprechen wollten. Eine wesentliche Vereinfachung der aus dem System (G)

entspringenden Teilungspostulate verdanken wir nun Dedekind, der, unabhängig von der ganzen Cantorschen Wohlordnungstheorie, die Axiome des Typus ω auf Axiome der Zuordnung und der Teilung zurückgeführt hat [1]. Den Bericht über diese Dedekindsche Theorie will ich in Form einer Analysis der Beweisführung erbringen, indem ich bei jeder der sehr abstrakten Begriffsbildungen zunächst zeige, wie man zu ihr gelangt. In der Darstellung Dedekinds findet sich dieser Hinweis erst am Schlusse, und das verleiht ihr eine eigenartige künstlerische Geschlossenheit und eine unerreichte logische Strenge der Beweisführung, die aber dem Nichtfachmanne das Verständnis erschwert.

Wir betrachten eine Menge M und eine eindeutige Zuordnung φ, welche jedem Element x von M ein Element $\varphi(x)$ von M zuordnet. Sie bildet, wie wir sagen, M auf sich selbst ab, und wir nennen mit Dedekind die Menge M eine Kette in Bezug auf die Abbildung φ, oder, wenn nur eine Abbildung in Frage steht, schlechthin eine Kette. Die definierende Eigenschaft einer Kette besteht also darin, daß $\varphi(x)$ zu ihr gehört, sofern x eines ihrer Elemente ist.

Die Menge der Elemente x, $\varphi(x)$, $\varphi^2(x), \dots \varphi^n(x), \dots$ ist eine Kette und zudem ist sie ein Teil von M, wenn x in M enthalten ist. Sie kann unter Umständen ein echter Teil von M sein, sie kann aber auch mit M identisch sein. Wir bezeichnen sie künftig mit $K(x)$. —

Ist M' irgend eine Kette, die Teil von M ist und x enthält, so enthält sie auch $\varphi(x)$, demnach $\varphi^2(x)$ und danach wieder $\varphi^3(x)$ etc., kurz sie enthält $K(x)$. Die Kette $K(x)$ ist also in jeder Kette enthalten, die x enthält, sie ist die kleinste Kette, in der

[1] Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig 1888.

x überhaupt enthalten sein kann. Diese Eigenschaft der Menge $K(x)$ wollen wir nun umgekehrt als ihre Definition wählen.

§ 129. Wir setzen also voraus, es gebe eine Menge M und eine eindeutige, nicht notwendig umkehrbar-eindeutige Abbildung φ von M in sich selbst. Ein Teil von M, der durch φ in sich selbst abgebildet wird, heißt eine Kette. Solcher Ketten gibt es mindestens eine, die Menge M selbst.

Es sei jetzt M_1 irgend ein Teil von M und x ein Element in M. Wir machen folgende Disjunktion:

Entweder es gibt eine Kette in M, die M_1, nicht aber x enthält, oder jede Kette, die M_1 enthält, enthält auch x. Im letzteren Fall rechnen wir x zu einer Menge $K(M_1)$, die nach ihrer Definition Teil von M ist und mindestens alle Elemente von M_1 enthält. Sie ist ferner ein Teil jeder Kette, welche M_1 enthält; sie ist vor allem, wie man sofort nachweist, selbst eine Kette. Denn wäre x in $K(M_1)$ und $\varphi(x)$ nicht in $K(M_1)$, so hieße das: jede Kette, die M_1 enthält, enthält x, aber es gibt eine Kette, die M_1 enthält und $\varphi(x)$ nicht enthält. Dies aber ist unmöglich, denn eine Kette, die M_1 enthält, enthält x, also, als Kette auch $\varphi(x)$.

Wir sind danach in der Tat berechtigt, $K(M_1)$ als die kleinste, M_1 enthaltende Kette zu bezeichnen.

Diese einfache Definition setzt uns sofort in den Stand, den Induktionsschluß in einer allgemeinen Form zu begründen. Es sei S eine Menge, von der wir zweierlei wissen:

Erstens: sie enthält M_1.

Zweitens: enthält sie das Element x von $K(M_1)$, so enthält sie auch $\varphi(x)$.

So beweisen wir, daß S die Kette $K(M_1)$ enthält. Der zweite Teil unserer Voraussetzung sagt aus, daß alle Elemente von $K(M_1)$,

die in S enthalten sind, eine Kette bilden. Diese ist natürlich als Teil von $K(M_1)$ auch Kette in M. Der erste Teil der Voraussetzung behauptet weiter, daß diese Kette M_1 enthält. Daher enthält diese Kette auch $K(M_1)$, und da sie nur Elemente aus $K(M_1)$ enthält, ist sie mit $K(M_1)$ identisch, d. h. alle Elemente von $K(M_1)$ gehören zu S.

§ 130. Ist A eine Menge von Ketten, so ist auch die Vereinigungsmenge N aller zu A gehörigen Ketten eine Kette. Die Aussage: „x gehört zu N" steht nämlich für folgende andere: Es gibt eine zu A gehörige Menge A, welche x enthält. Da nun A als Kette auch $\varphi(x)$ enthält, ist $\varphi(x)$ in einer Menge des Systems A enthalten, d. h. $\varphi(x)$ gehört zu N. Danach ist N eine Kette.

Aber auch der größte gemeinsame Teil N' von A, sofern es überhaupt Elemente gibt, die allen zu A gehörigen Mengen gemeinsam sind, ist eine Kette. Die Aussage „x ist in N'" steht nämlich für folgende andere: Ist A in A, so ist x in A. Da A eine Kette, ist auch $\varphi(x)$ in A, d. h. mit x ist auch $\varphi(x)$ allen Ketten des Systems A gemeinsam: N' ist eine Kette.

Unter dem Bild $\varphi(M_1)$ eines Teiles M_1 von M verstehen wir nach früheren Festsetzungen die Menge aller Elemente von M, die den Elementen von M_1 durch φ zugeordnet sind. Die Aussage: „x gehört zu $\varphi(M_1)$", besagt also: „es ist $x = \varphi(y)$, y in M_1." Ist nun M_1 eine Kette, so ist auch $\varphi(M_1)$ eine Kette. Denn ist x in $\varphi(M_1)$, so ist $x = \varphi(y)$, y in M_1; da M_1 eine Kette, ist auch x in M_1; daher ist $\varphi(x)$ Bild eines Elementes x in M_1, d. h. $\varphi(x)$ ist in $\varphi(M_1)$, w. z. b. w.

Es sei nun a irgend ein Element von M, $K(a)$ wieder seine kleinste Kette, $\varphi(K(a))$ ihr Bild. Betrachten wir diese Ketten

vom naiven Standpunkt aus. $K(a)$ enthält die Elemente a, $\varphi(a)$, $\varphi^2(a), \ldots \varphi^n(a), \ldots$ und $\varphi K(a)$ die Bilder derselben:

$$\varphi(a),\ \varphi(\varphi(a)) = \varphi^2(a),\ \varphi(\varphi^2(a)) = \varphi^3(a) \text{ etc.}$$

Wir sehen, daß $\varphi(K(a))$ auch kleinste Kette des Elementes $\varphi(a)$ ist.

LXXVI. Die Kette des Bildes $\varphi(a)$ von a ist auch Bild der Kette von a:

$$K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))\ ^1.$$

Es handelt sich nun um den scharfen Beweis dieses Satzes. Da $\varphi(K(a))$ das Element $\varphi(a)$ enthält, enthält es auch, als Kette, die Kette von $\varphi(a)$, $K(\varphi(a))$. Es ist also noch umgekehrt zu zeigen, daß $K(\varphi(a))$ das Bild $\varphi(K(a))$ enthält. Zu diesem Zweck bilden wir die Vereinigungsmenge A von a und $K(\varphi(a))$. Ist a in $K(\varphi(a))$ enthalten, so auch $K(a)$ und damit $\varphi(K(a))$. In diesem Fall ist der Satz trivial und $A = K(a) = K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))$. Es sei also a nicht in $K(\varphi(a))$ enthalten. Auch dann ist A eine Kette. Denn ist x in A, so ist entweder $x = a$, also $\varphi(x) = \varphi(a)$ in $K(\varphi(a))$, oder x ist in $K(\varphi(a))$ enthalten, also $\varphi(x)$ ebenfalls, da $K(\varphi(a))$ eine Kette ist. Es ist somit das Bild jedes Elementes von A, d. h. das Bild $\varphi(A)$ in $K(\varphi(a))$ und a fortiori in A selbst enthalten: A ist eine Kette. Da A das Element a enthält, ist $K(a)$ Teil von A, somit $\varphi(K(a))$ Teil von $\varphi(A)$ und damit Teil von $K(\varphi(a))$, w. z. b. w.

Wir nennen die Kette $K(\varphi(a)) = \varphi(K(a))$ die „Bildkette" von a und bezeichnen sie auch kurz mit $K'(a)$. Es ist leicht zu zeigen, daß A mit $K(a)$ identisch ist. Es war bereits erkannt, daß $K(a)$ Teil von A ist. Es ist aber auch umgekehrt a, $\varphi(a)$

[1] Dieser Satz gilt auch, wenn a nicht einzelnes Element, sondern Teilmenge von M ist; doch bedürfen wir dieser Verallgemeinerung nicht.

und damit $K(\varphi(a))$ in $K(a)$ enthalten, daher ist auch A Teil von $K(a)$, d. h. $A = K(a)$:

LXXVII. Ist a nicht in seiner Bildkette $K'(a)$ enthalten, so hat man nur a zu $K'(a)$ hinzuzufügen, um die Kette von a, $K(a)$ zu erhalten:

$$K(a) = a + K'(a).$$

§ 131. Einige einfache Beispiele sollen zunächst zeigen, welche besonderen Voraussetzungen wir noch über $\mathfrak{G}$ aufstellen müssen. Es bestehe zunächst M aus einer endlichen Anzahl von Elementen, etwa aus den Zahlen 1 bis 5, und es sei

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 1.$$

In diesem Fall ist M eine Kette, und zwar Kette jedes Elementes: $M = K(1) = K(2)$ etc. Die Abbildung φ ist umkehrbar eindeutig. Das Bild $\varphi(M)$ ist mit M identisch.

Sei zweitens

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 2.$$

Hier ist $M = K(1)$, das Bild von M enthält das Element 1 nicht. Die Abbildung ist nicht umkehrbar eindeutig.

Sei drittens

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 5, \quad \varphi(5) = 3.$$

Die Menge ist nicht Kette eines ihrer Elemente, vielmehr sind $K(1)$, $K(2)$ gleich dem Teil (1,2), $K(3)$, $K(4)$, $K(5)$ gleich (3, 4, 5). Das Bild von M ist mit M identisch, φ ist umkehrbar eindeutig.

Wenn wir endliche Mengen betrachten, wird stets M seinem Bilde gleich sein, sofern es sich um eine umkehrbar eindeutige Zuordnung handelt. Für transfinite Mengen sind jedoch diese

beiden Tatsachen von einander unabhängig. Insbesondere wird 𝔖 durch die umkehrbar eindeutige Zuordnung $\varphi(n) = n + 1$ auf einen echten Teil seiner selbst, nämlich auf die Menge 2, 3, 4 ... abgebildet. Außerdem ist hierbei $𝔖 = K(1)$ und damit haben wir diejenigen Tatsachen bereits vollständig zur Hand, auf denen sich das Dedekindsche Axiomensystem aufbaut. Es lautet:

(D) 1) Die Menge 𝔖 besitzt eine Abbildung φ auf sich selbst.

2) Die Menge 𝔖 besitzt ein Grundelement 1, dessen kleinste Kette sie ist.

3) Das Bild von 𝔖 ist echter Teil von 𝔖.

4) Die Abbildung φ ist umkehrbar eindeutig.

Die Axiome (2) bis (4) setzen (1) voraus, sind aber unter sich logisch unabhängig, wie die vorausgeschickten Beispiele zeigen. Aus (1, 3, 4) folgt, daß 𝔖 transfinit ist. Umgekehrt folgt aus der Existenz einer transfiniten Menge M die Existenz einer Menge, die den Axiomen (1) bis (4) genügt. Ist nämlich M transfinit, so heißt das: Es existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf einen echten Teil M_1 seiner selbst. Es gibt daher ein Element a in M, das nicht zu M_1 gehört, d. h. a ist nicht Bild irgend eines Elementes in M. Die kleinste Kette $K(a)$ genügt nun offenbar den Axiomen (1, 2, 4), und daß sie auch (3) genügt, folgt aus der Annahme über a, wonach a nicht in $\varphi(K(a))$ enthalten sein kann.

Aus unserer allgemeinen Fassung des Induktionsschlusses ergibt sich jetzt im besonderen die Zulässigkeit des Schlusses von n auf $n + 1$. Enthält eine Menge S das Element 1, und gehört mit n auch $\varphi(n)$ zu ihr, so ist 𝔖 ein Teil von S. Denn die zweite Aussage der Voraussetzung erklärt die Menge aller Elemente

von $\mathfrak{G}$, die zu S gehören, für eine Kette, die nach der ersten Aussage 1, somit $K(1) = \mathfrak{G}$ selbst enthält.

Dieser Beweis ist so außerordentlich einfach, daß man wohl sagen kann, das Axiom (2) sei gar nichts anderes als das Postulat der Zulässigkeit des Induktionsbeweises. Geht man aber auf unsere früheren undurchführbaren Versuche zur Begründung oder Formulierung dieses Postulates zurück, so wird man zugeben müssen: Selbst wenn es sich hier nicht um einen Beweis, sondern nur um eine Formulierung der Induktion handelt, so ist doch diese Formulierung selbst eine so einfache und durchsichtige, daß in ihrer Entdeckung ein direkt klassischer Fortschritt der Theorie der ganzen Zahlen enthalten ist.

Die Dedekindsche Begründung der Induktion ist in einer Hinsicht analog zu der oben gegebenen Begründung durch die Wohlordnung von $\mathfrak{G}$. Bei der letzteren ist das entscheidende Postulat dies, daß jeder Abschnitt von $\mathfrak{G}$ ein letztes Element enthält, daß also $\mathfrak{G}$ selbst den niedersten Typus ohne letztes Element darstellt. In der Dedekindschen Fassung liegt das Schwergewicht in dem Postulat, daß $\mathfrak{G}$ die kleinste Kette ist, welche 1 enthält. Beide Begründungen sind aber darin wesentlich verschieden, daß sie zu völlig abweichenden Verallgemeinerungen führen.

An dieser Stelle sei sogleich hervorgehoben, daß das Axiom (3) eine engere Fassung zuläßt, wenn man es mit (2) vergleicht. Es folgt nämlich sofort:

3*) Das Bild $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ enthält jedes Element von $\mathfrak{G}$ mit Ausnahme des Elementes 1. D. h. jedes Element von $\mathfrak{G}$ außer 1 ist Bild eines Elementes von $\mathfrak{G}$.

Enthielte nämlich $\mathfrak{G}'$ die Eins, so wäre auch $K(1)$ und nach (2) $\mathfrak{G}$ selbst Teil von $\mathfrak{G}'$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ gegen (3). $\mathfrak{G}'$ enthält daher 1 nicht. Nun ist aber $\mathfrak{G}'$ als Bild von $\mathfrak{G} = K(1)$ die Bildkette $K'(1)$ von 1 und dieser haben wir nach LXXVII nur das Element 1 wieder hinzuzufügen um $K(1) = \mathfrak{G}$ zurückzuerhalten. — Da die engere Fassung (3*) einen beweisbaren Teil enthält, ist sie in (D) zunächst durch ihren logisch unabhängigen Bestandteil ersetzt worden.

§ 132. Wir haben jetzt zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ durch die Axiome (D) wirklich charakterisiert ist. Wir wollen dies dadurch tun, daß wir die Ordnung von $\mathfrak{G}$ definieren und von ihr zeigen, daß sie dem System (G) des Kapitels XXVII genügt. Wir verlassen dabei allerdings denjenigen Weg, den Herr Dedekind in seiner Darstellung eingeschlagen hat, zum mindesten in der formalen Anordnung, bleiben dafür aber in besserem Zusammenhang mit den bisherigen Entwicklungen dieses Referates.

Wenn wir die Ketten der Elemente von $\mathfrak{G}$,

$$K(1),\ K(2),\ K(3), \ldots K(n) \ldots$$

aus unserer bereits vorhandenen Kenntnis von $\mathfrak{G}$ heraus konstruieren, so sehen wir, daß sie nichts anderes sind, als die Reste von $\mathfrak{G}$:

$$K(1) = R(1) = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$
$$K(2) = R(2) = 2,\ 3,\ 4, \ldots$$
$$K(n) = R(n) = n,\ n+1,\ n+2, \ldots$$

Nach den Ausführungen des vorigen Kapitels können wir daher sofort die Ordnung von $\mathfrak{G}$ definieren, wenn wir zeigen können, daß die Menge dieser Ketten den Axiomen (A, B) der §§ 122, 123

genügt. Das Axiom (A) fordert, auf unseren Fall angewandt, daß unter zwei Ketten $K(a)$, $K(b)$ stets eine existiert, die Teil der andern ist. Es soll also ausgeschlossen sein, das jede von beiden Elemente enthält, die der andern nicht angehören.

Enthält nun $K(a)$ Elemente, die nicht zu $K(b)$ gehören, so ist a eines von diesen, da $K(b)$ mit a auch $K(a)$ enthalten müßte. Demnach nimmt Axiom (A) folgende Fassung an:

5) Ist a nicht in $K(b)$ enthalten, so ist b in $K(a)$ enthalten.

Es liegt nahe, diesen Satz durch Induktion zu beweisen, da er für $a = 1$ sicher richtig ist. Der Beweis folgt nach Beendigung unserer Analyse.

Das Axiom (B) fordert, daß zu zwei verschiedenen Elementen a, b stets eine Kette existiert, die eines enthält, das andere nicht. Ist a nicht in $K(b)$ enthalten oder b nicht in $K(a)$ enthalten, so ist dieser Bedingung sicher genügt. Es fragt sich daher, ob a in $K(b)$ und b in $K(a)$ enthalten sein kann. In diesem Fall enthalten sich $K(a)$ und $K(b)$ gegenseitig, d. h. es ist $K(a) = K(b)$ woraus weiter folgt, daß jede Kette, die a enthält, auch b enthält und umgekehrt. Gilt Axiom (B), so können in diesem Fall a und b nicht verschieden sein, wir müssen daher beweisen:

6) Aus $K(a) = K(b)$ folgt $a = b$.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, die Vollständigkeit des Systems aller Ketten $K(a)$ zu erweisen. Da nun nach § 130 sowohl der größte Teiler wie die Vereinigungsmenge einer Menge von Ketten stets eine Kette ist, spitzt sich der Beweis der Vollständigkeit auf folgenden Satz zu:

7) Jede in $\mathfrak{G}$ enthaltene Kette ist kleinste Kette eines Elementes von $\mathfrak{G}$.

Ist dann T eine Teilmenge des Systems A aller Ketten $K(a)$, so ist ihr größter Teiler wie auch ihre Vereinigungsmenge in dem System A enthalten, dieses also nach Satz LXXVa vollständig.

Fassen wir nun A als das System der Reste von $\mathfrak{G}$ auf, so ergibt sich sofort die Wohlordnung von $\mathfrak{G}$. Jeder Rest $K(a)$ enthält nämlich in a ein Element, das einem echten Teile von $K(a)$, der zu A gehört, nicht angehören kann. Denn wäre a in $K(b)$, so wäre $K(a)$ in $K(b)$, also $K(b)$ gewiß nicht echter Teil von $K(a)$.

Die spezielle Wohlordnung von $\mathfrak{G}$ ist nun dadurch charakterisiert, daß jeder eigentliche Rest ein unmittelbar vorangehendes Element besitzt. Ein eigentlicher Rest kann das Element 1 nicht enthalten, da jede Kette, die 1 enthält, mit $\mathfrak{G}$ identisch ist. Nun ist aber jedes von 1 verschiedene Element in $\mathfrak{G}' = \varphi(\mathfrak{G})$ enthalten, also Bild $\varphi(x)$ eines Elementes von $\mathfrak{G}$. Daher ist jede Kette, die echter Teil von $\mathfrak{G}$ ist, eine Bildkette, $K(\varphi(x))$. Ziehen wir unsere Kenntnis der Menge $\mathfrak{G}$ heran, so sehen wir, daß das unmittelbar vorangehende Element von $K(\varphi(x)) = (x+1,\ x+2,\ x+3, \ldots)$ das Element x selbst ist. Es ist also zweierlei zu zeigen (§ 127):

8) Kein Element x ist in seiner Bildkette enthalten.

und: $(K(\varphi(x)) + x)$ ist eine Kette. Letzteres steht aber nach Satz LXXVII bereits fest, und zwar ist $(K(\varphi(x)) + x) = K(x)$.

Da Satz (8) für das Element 1 durch Axiom (3*) erfüllt ist, liegt es wiederum nahe, ihn durch Induktion zu beweisen. Zugleich erkennen wir aus Satz 8 die letzte typische Eigenschaft der Menge $\mathfrak{G}$: sie besitzt kein letztes Element. Denn durch die Ordnung, die ihr das System der Ketten $K(a)$ vorschreibt, ist hinter jedes Element x noch die ganze Bildkette $K'(x)$ geordnet, die nach (8) x selbst nicht enthält.

Mit Satz (8) erledigt sich aber auch Satz (6). Ist nämlich $K(a) = K(b)$, so ist, da $K(a) = a + K'(a)$, entweder $b = a$ oder b in $K'(a)$. Im letzteren Fall wäre aber auch $K(b)$, d. h. $K(a)$ selbst Teil von $K'(a)$, also auch a in $K'(a)$ gegen Satz 8. Es bleiben demnach nur die Sätze 5, 7, 8 zu beweisen. Da wir ihre Beweise unabhängig von den bisher geführten Betrachtungen erbringen, sind wir an die Reihenfolge nicht gebunden und können daher mit Satz (8) beginnen.

§ 133. Das Element 1 ist nicht in seiner Bildkette $\mathfrak{G}'$ enthalten (Axiom 3*). Es sei a ein Element, das ebenfalls nicht zu seiner Bildkette $K'(a)$ gehört. Wäre $\varphi(a) = a'$ in $K'(a')$ enthalten, so hieße das, da $K'(a') = \varphi K(a')$ ist: a' ist Bild $\varphi(x)$ eines Elementes x in $K(a')$. Nun ist $a' = \varphi(a)$, nach Axiom (4) wäre daher $a = x$, d. h. in $K(a')$ gegen die Annahme. Es ist also a' nicht in seiner Bildkette enthalten, womit durch Induktion Satz 8 folgt.

Wir gehen zu Satz 5 über. Es sei für a bewiesen, daß b in $K(a)$ enthalten ist, wenn a nicht in $K(b)$ enthalten ist. Für $a = 1$ steht dies bereits fest. Es sei ferner c ein Element, dessen Kette a' nicht enthält. Dann enthält sie a fortiori auch a nicht. Daher ist c in $K(a)$ enthalten, somit ist entweder $c = a$ oder c in $K(a')$. Das erste ist unmöglich, da sonst gegen die Annahme $K(c)$ das Element a' enthalten würde. Also ist c in $K(a')$, w. z. b. w. Daraus folgt durch Induktion Satz 5.

Zum Schlusse beweisen wir Satz 7. Es sei K eine Kette in $\mathfrak{G}$. Ist $K = \mathfrak{G}$, so ist $K = K(1)$ und der Satz richtig. Es sei weiter K echter Teil von $\mathfrak{G}$, so enthält K das Element 1 nicht. Die komplementäre Menge L von K ist keine Kette, denn sie enthält 1, ohne $\mathfrak{G}$ zu enthalten. Es gibt daher in ihr ein Element

a, dessen Bild $\varphi(a) = a'$ nicht zu L gehört. Da a' somit zu K gehört, enthält K die Kette $K(a')$.

Enthält K irgend ein Element x, so ist auch $K(x)$ ein Teil von K. Zwischen $K(x)$ und $K(a')$ können drei Beziehungen bestehen. Erstens: $K(x)$ ist echter Teil von $K(a')$, zweitens: $K(x) = K(a')$. In diesen beiden Fällen ist x in $K(a')$ enthalten. Drittens bliebe die Möglichkeit, daß $K(a')$ echter Teil von $K(x)$ wäre, also x nicht zu $K(a')$ gehörte. Dann wäre a' in $K(x')$, d. h. a' Bild eines Elementes in $K(x)$. Dieses Element könnte nach Axiom 4 nur a sein, da $a' = \varphi(a)$. Es wäre dann aber a in K und nicht in L, gegen die Definition von a. Also ist der dritte Fall unmöglich, vielmehr ist jedes Element x von K in $K(a')$ enthalten, und da auch $K(a')$ in K enthalten ist, ist K kleinste Kette von a', was zu beweisen war.

Hiermit ist bewiesen, daß das Dedekindsche Axiomsystem dem Wohlordnungssystem $\mathfrak{S}$ völlig äquivalent ist. Es stützt sich im Gegensatz zu jenem auf den Zuordnungsbegriff an Stelle des Ordnungsbegriffes und führt dadurch die Zulässigkeit seiner Definitionen auf das eine Postulat zurück, daß es transfinite Mengen geben soll.

XXX.

Der Wohlordnungssatz.

§ 134. Am Ende des Kapitels XXVII haben wir gezeigt, daß jede Menge, die nicht endlich ist, eine abzählbare Teilmenge enthält. Dieser Beweis beruhte auf einer rein logischen Disjunktion und benutzte an einer Stelle das Prinzip der einmaligen Auswahl, nämlich bei dem Beweis, daß eine Menge, die nicht endliche Teilmengen von beliebiger Mächtigkeit enthält, endlich sein muß.

Hierdurch ist der sehr anfechtbare Beweis durch iterierte Auswahl überflüssig geworden.

In ähnlicher Weise läßt sich der in § 104 angegebene unbrauchbare Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, von der iterierten Auswahl befreien und auf ein Postulat zurückführen, das keine Ordnung der Auswahl verlangt. In dieser exakten Fassung verliert der Beweis zugleich die Fiktion, als enthalte er irgend eine Methode, die Wohlordnung auszuführen.

Wenn eine Menge wohlgeordnet werden kann, so wird dadurch in jeder Teilmenge ein Element ausgezeichnet, nämlich das erste. Der Wohlordnungssatz kehrt diese Tatsache um: Wenn es möglich ist, in jeder Teilmenge einer Menge M ein Element auszuzeichnen, so kann M wohlgeordnet werden.

Will man sich mit einer Plausibelmachung begnügen, so kann man folgendermaßen verfahren: Ich wähle aus M ein Element m_1 aus, oder falls auch in M selbst als unechtem Teil von M ein Element ausgezeichnet ist, so wähle ich dieses. In der zu m_1 komplementären Teilmenge $M - m_1$ ist ein Element ausgezeichnet. Es heiße m_2. In $M - m_1 - m_2$ heiße das ausgezeichnete Element m_3, in $M - m_1 - m_2 - m_3$ ist ebenso m_4 ausgezeichnet u. s. f. Auf diese Art entsteht eine wohlgeordnete Teilmenge $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n \ldots$, die, falls M nicht vorher erschöpft ist, den Typus ω hat. Existiert ihre komplementäre Teilmenge, so ist in dieser ein Element m_ω ausgezeichnet, nach dessen Entfernung $m_{\omega+1}$ u. s. f.

Diese Methode unterscheidet sich von der früheren durch iterierte Auswahl in einem wesentlichen Punkt: es wird angenommen, daß jedes „auszuwählende" Element m_α bereits durch die vorangehenden gesetzmäßig bestimmt ist. Trotzdem ist die ganze Betrachtungsweise noch durchaus unexakt. Mit den Indices $1, 2, \omega, \ldots$

beschwören wir die Menge W wieder herauf und damit die Frage der Bezeichnung und der Erzeugungsprinzipien. Es liegt daher in der Darstellung, die Herr Zermelo[1] der Wohlordnung zu Grunde gelegt hat, ein wesentlicher Fortschritt.

§ 135. Es sei M_1 irgend eine Teilmenge von M, $M - M_1$ die komplementäre und x deren ausgezeichnetes Element. Wir bezeichnen es mit $\gamma(M_1)$. Die Zuordnung γ ordnet daher jeder Teilmenge ein nicht in ihr enthaltenes Element zu. Da es zu M keine komplementäre Teilmenge gibt, fingieren wir wieder die aus keinem Element bestehende Menge 0 und bezeichnen mit $\gamma(0)$ dasjenige Element, welches in M selbst ausgezeichnet war.

Die Bildung der Wohlordnung durch

$$\gamma(0) = m_1, \quad \gamma(m_1) = m_2, \quad \gamma(m_1, m_2) = m_3,$$

führen wir nun nicht durch, sondern verwenden sie lediglich, um uns zu überzeugen, daß M Teilmengen M' von folgender besonderen Beschaffenheit enthält:

1) M' ist wohlgeordnet

2) $\gamma(0) = m_1$ ist ihr erstes Element. Ist $A(x)$ ein Abschnitt von M', so ist $x = \gamma(A(x))$.

Solche Teilmengen sind in der Tat die Mengen m_1, (m_1, m_2), (m_1, m_2, m_3). Wir nennen eine Teilmenge von M, die den Postulaten (1, 2) genügt, eine γ-Menge und beachten, daß aus der Definition sofort der Satz folgt:

3) Jeder Abschnitt einer γ-Menge ist selbst eine γ-Menge.

Wir behaupten nun, daß die Menge Γ aller γ-Mengen ein ordnendes System bildet, daß M die Vereinigungsmenge dieses Systems

[1] Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Annalen 59.

ist, und daß die Ordnung von M, sofern wir Γ als System von Abschnitten auffassen, eine Wohlordnung ist.

Das Postulat (A), daß Γ ein konzentrisches System sei, werden wir im Hinblick auf Satz LXXIV sogleich in folgender engeren Fassung beweisen:

4) Von zwei verschiedenen γ-Mengen ist eine ein Abschnitt der andern.

An Stelle dieses Satzes genügt es, folgenden einfacheren zu setzen:

5) Zwei ähnliche γ-Mengen sind identisch.

Nach Satz (4) können sie nämlich nicht verschieden sein, und gilt umgekehrt (5), so können zwei verschiedene γ-Mengen nicht ähnlich sein, also ist eine nach (1) einem Abschnitt der andern ähnlich und mit diesem, da er nach (3) selbst eine γ-Menge ist, nach (5) identisch. Also sind (4) und (5) äquivalente Sätze.

Ehe wir (5) beweisen, betrachten wir die Forderung (B) § 123: Sind x, y zwei Elemente, die in γ-Mengen enthalten sind, so gibt es eine γ-Menge, die eines der Elemente enthält, das andere nicht. Ist nämlich x in A, y in B, so ist entweder $A = B$ oder eine in der anderen enthalten, also enthält etwa A sowohl x wie y. Da A wohlgeordnet ist, ist eines der Elemente das frühere, etwa x; dann ist x in $A(y)$ enthalten, y aber nicht, und $A(y)$ ist nach (3) eine γ-Menge.

Sind die Postulate (A), (B) als erfüllt erkannt, so folgt aus Satz LXXIV, daß die Vereinigungsmenge M_1 aller Γ Mengen wohlgeordnet ist, und es bleibt der Nachweis zu erbringen, daß sie mit M identisch sein muß.

Wir beweisen nun zunächst Satz (5). Seien $A \simeq B$ zwei γ-Mengen, $\varphi(x) = y$ dasjenige Element von B, welches dem Element x von A entspricht, S die Menge aller Elemente von A, für die

$\varphi(x) = x$ ist. Sie enthält das erste Element m_1 von A, da es auch erstes von B ist. Enthält sie ferner alle Elemente eines Abschnitts $A(x)$ von A, so ist dieser mit dem ähnlichen Abschnitt $A(y)$ von B identisch und $\varphi(x) = y$. Es ist aber, weil A und B γ-Mengen sind, $x = \gamma(A(x)) = \gamma(A(y)) = y$, also enthält S mit $A(x)$ auch x. Aus dem allgemeinen Schlußschema XXI des § 33 folgt somit, daß S alle Elemente von A enthält, d. h. es ist A mit B identisch.

§ 136. Nachdem wir gezeigt haben, daß die Vereinigungsmenge M_1 aller γ-Mengen wohlgeordnet ist, beweisen wir ihre Identität mit M, und zwar in zwei Schritten. Zuerst überzeugen wir uns, daß M_1 selbst eine γ-Menge ist. In der Tat, sie ist wohlgeordnet, die γ-Mengen sind Abschnitte von M_1, und daher m_1 erstes Element von M_1. Ist nun x ein Element von M_1, so heißt das: es ist Element einer γ-Menge A. Diese ist ein Abschnitt von M_1, daher ist der Abschnitt $A(x)$ in M auch Abschnitt von A, somit $x = \varphi(A(x))$. M_1 genügt also den Forderungen (1, 2), w. z. b. w.

Wir beweisen nun weiter: J e d e γ - M e n g e, d i e e c h t e r T e i l v o n M i s t, i s t A b s c h n i t t e i n e r γ - M e n g e. Daraus folgt, daß M_1 nicht echter Teil von M sein kann, da es sonst Abschnitt einer γ-Menge, daher nicht Menge a l l e r in γ-Mengen enthaltenen Elemente wäre. M_1 ist somit mit M identisch, also M wohlgeordnet.

Der Beweis des genannten Satzes beruht auf dem allgemeinen Satz, daß die Vereinigungsmenge zweier teilfremden wohlgeordneten Mengen P und Q durch Hintereinandersetzen wohlgeordnet werden kann. Daß die Ordnung von $P + Q$ eine Wohlordnung ist, wenn P und Q wohlgeordnet sind, ist mit aller Strenge beweisbar, es läßt sich darum auch an jede wohlgeordnete Menge ein Element

anhängen. Wir haben bei den ultrafiniten Paradoxieen gesehen, daß es zu einem Widerspruch führt, wenn man an die Menge W aller transfiniten Ordnungszahlen ein Element anhängt. Wir haben dabei zugleich hervorgehoben, daß dieser Widerspruch in der Definition von W, nicht aber in dem Anhängen eines Elementes liegt; daß vielmehr die Menge W selbst erst recht aufgegeben werden muß, wenn man auf das Anhängen eines Elementes verzichtet. Da unser Beweis des Wohlordnungssatzes sich zudem gerade durch die Vermeidung aller Abstraktionen auszeichnet, die zum Begriff der Ordnungszahl und der Menge W führen, ist er vom Standpunkt dieser Menge aus nicht mehr und nicht weniger anfechtbar, als die ganzen Grundlagen des mengentheoretischen Kalkuls selbst.

Wenn A eine γ-Menge ist, die echter Teil von M ist, so existiert $\gamma(A) = x$ und die Menge $A + x$ ist wieder eine γ-Menge; denn jeder ihrer Abschnitte mit Ausnahme von A selbst ist Abschnitt von A, ihr erstes Element ist erstes Element von A, also gleich m_1; für den Abschnitt A selbst ist aber nach der Definition von x das Postulat (2) erfüllt, und ihre Ordnung ist eine Wohlordnung, wenn x hinter alle Elemente von A geordnet wird, wie dies das Zeichen $A + x$ vorschreibt. Demnach ist A der Abschnitt $A(x)$ der γ-Menge $A + x$.

§ 137. Hiermit ist der Beweis des Wohlordnungssatzes zu Ende geführt. Der einzige Einwand, der gegen den Beweis selbst geführt werden kann, betrifft das Anhängen des Elementes $\gamma(A)$ an eine γ-Menge A. Mit ihm haben wir uns bereits auseinandergesetzt. Alle weiteren Einwände richten sich gegen die Zulässigkeit des Auswahlpostulats, nach dem es möglich sein soll, aus jeder Teilmenge von M ein Element auszuwählen. Diese Auswahl ist beispielsweise für das Kontinuum noch nicht gelungen, der Wohl-

ordnungssatz hat also das Kontinuumproblem seiner Lösung bis jetzt nicht näher gebracht. Da aber bereits die Vermutung aufgetaucht ist, daß eine Wohlordnung des Kontinuums unmöglich sei, ist doch der Wohlordnungssatz insofern von Bedeutung geworden, als er dieser Vermutung so ziemlich jeden Boden entzogen hat. Denn der Nachweis, daß es nicht möglich sein sollte, in jeder Teilmenge des Kontinuums ein Element auszuwählen, wird von vornherein auf schärfere Opposition stoßen, als der Nachweis der Unmöglichkeit seiner Wohlordnung. Eine Teilmenge, aus der sich ein Element nicht auswählen ließe, kann gewiß niemals angegeben werden, weder im Kontinuum noch in sonst einer Menge.

Wenn das Auswahlpostulat zugegeben wird, d. h. wenn es möglich sein soll, in jeder Teilmenge einer Menge M ein Element auszuzeichnen, so läßt sich der Wohlordnungssatz dahin aussprechen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Die Konsequenzen dieses Satzes sind dann außerordentlich weittragende: jede Mächtigkeit ist ein Alef, es sind daher alle Mächtigkeiten komparabel, und das Trichotomieproblem der Mächtigkeiten ist gelöst. Zugleich erhalten wir einen neuen Nachweis, daß jede nicht endliche Menge eine abzählbare Teilmenge enthält.

Es hat sich an den Wohlordnungssatz eine umfangreiche Diskussion angeknüpft, die ihr Ende noch nicht erreicht haben dürfte. Es muß auch aus anderen Gründen auf einen Bericht über diese Diskussion verzichtet werden, vor allem darum, weil durch sie die Frage nach der zulässigen Anwendung des Mengenbegriffs in den Vordergrund getreten ist, und ohne deren Erledigung eine befriedigende Antwort nicht zu erwarten ist. Auch die Frage, welche Unterschiede zwischen logischer Möglichkeit und mathematischer Existenz bestehen, hängt mit dem Auswahlpostulat aufs engste zusammen. Und zu diesen Fragen vermag ich nichts neues

zu sagen, geschweige denn eine Antwort zu geben. Solange aber nicht geklärt ist, was eine Menge ist, d. h. welche Gesamtheiten sich den mengentheoretischen Betrachtungen ohne Widerspruch fügen, ist auch über den Umfang des Satzes, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, keine Klarheit zu gewinnen.

Schlusswort.

Werfen wir einen Blick auf unsere Betrachtungen zurück, so sehen wir zunächst, daß eine große Reihe von Begriffen, wie der der Vereinigungsmenge, des gemeinsamen Teiles, der Ordnung und Wohlordnung, einer logisch einwandfreien Verwendung fähig sind, ohne daß die Endlichkeit der betrachteten Mengen vorausgesetzt wird, und daß es weiterhin auch tatsächlich unendliche Mengen gibt, zum mindesten die abzählbaren, bei denen die Verwendung zu positiven und gesicherten mathematischen Ergebnissen führt. Die Mengenlehre ist also nicht etwa derjenige rein formale Teil der Lehre von den endlichen Mengen, der durch Weglassen der Voraussetzung der Endlichkeit entsteht, — eine Deutung, die man ihr vielfach zu geben scheint. Im Gegenteil, wir haben gesehen, daß eine dogmatische Behandlung der ganzen Zahlen unmöglich ist, ohne die Annahme, daß es unendliche Mengen gibt. —

Die Eigenart der ganzen Schlußweise, ihre aufs äußerste getriebene Astraktion, berechtigen uns zu der Behauptung, daß wir in der Mengenlehre eines der eigenartigsten Kapitel der Mathematik besitzen; selbst die Infinitesimalrechnung und die mathematische Formelsprache stützt sich noch auf die klassischen Methoden der antiken Mathematik und besitzt Vorläufer in ihr. Die Mengenlehre bedeutet wohl den weitesten und kühnsten Schritt über die alten Methoden hinaus, den die Mathematik getan hat.

Eigentümlich erscheint mir das Mißverhältnis zwischen der unbegrenzten Reihe von Möglichkeiten, die uns die transfiniten Zahlen, insbesondere die Alefs, eröffnen, und der außerordentlich geringen Kenntnis, die wir faktisch von ihnen besitzen. Innerhalb dieser Reihe ein System durchsichtiger, einfacher Sätze und ein klarer, auf dem einfachen Begriff der Wohlordnung aufgebauter Zusammenhang von mathematischer Schönheit. Und unmittelbar daneben die Unmöglichkeit, über nichtwohlgeordnete nichtabzählbare Mengen, wie das Kontinuum, irgend etwas praktisch Wertvolles zu erfahren. Es hat manche mathematische Disziplin erst nach langem mühevollen Kampfe praktische Ergebnisse zeitigen können, und man wird darum allein der Mengenlehre, die noch in ihren ersten Anfängen steckt, nicht den Vorwurf der Unfruchtbarkeit machen dürfen; der Begriff der abzählbaren Menge hat bereits so vielfache Anwendung gefunden, daß er heute als unentbehrliches Hülfsmittel des Mathematikers gelten darf. Die Schwierigkeiten aber, die sich hinter der abzählbaren Mächtigkeit erheben, die in dem Problem der endlichen Bezeichnung und dem Kroneckerschen Postulat ihren, wenn auch unkorrekten Ausdruck finden, sind nicht mehr rein mathematischer Art, sondern hängen mit philosophischen Problemen aufs engste zusammen. Dies zeigt sich insbesondere an den ultrafiniten Paradoxieen, die uns lehren, daß dem Arbeiten mit Abstraktionen und rein logischen Disjunktionen irgendwelche Grenzen gezogen sein müssen.

Solange diese Fragen unerledigt sind, scheitert der mathematische Logizismus bereits, noch bevor er mit Ergebnissen der Philosophie in Widerstreit gerät. Die Betätigung der Logik im spezifisch mathematischen Gebiet besitzt einen anderen Grad der Gewißheit und Zuverlässigkeit als im Gebiet des allgemeinen Mengenbegriffs. Begriffe wie endliche Darstellbarkeit, Mengen,

die sich selbst enthalten u. a. sind keine mathematischen Bildungen mehr, und wer mit ihnen operiert, strauchelt. Dieser verschiedene Grad der Zuverlässigkeit kann nicht aus der Welt geschafft werden, wenn er auch bisher nur Sache des Gefühls und kein scharf umschriebener Begriff ist. Wenn die Mathematik nur ein Teil des Logikkalkuls sein soll, so ist sie doch jedenfalls ein widerspruchloser Teil eines nicht widerspruchlosen Gebietes, und in diesem Gegensatz steht sofort wieder das alte Problem des Unterschiedes zwischen Mathematik und Logik vor uns. Für den Philosophen aber erwächst gerade hier ein neues Arbeitsfeld, das von den Mathematikern heute noch vielfach mit dem logizistischen Vorurteil betreten wird. Wenn die ultrafiniten Paradoxieen, insbesondere die der Menge W, nicht zu beseitigen sind, so liegt die Vermutung nahe, daß sie im Zusammenhang mit den Antinomieen stehen, die Kant aufgestellt hat. Und es scheint mir eine wichtige Frage zu sein, ob solche Antinomieen im Gebiet der reinen Logik allein tatsächlich bereits auftreten.

